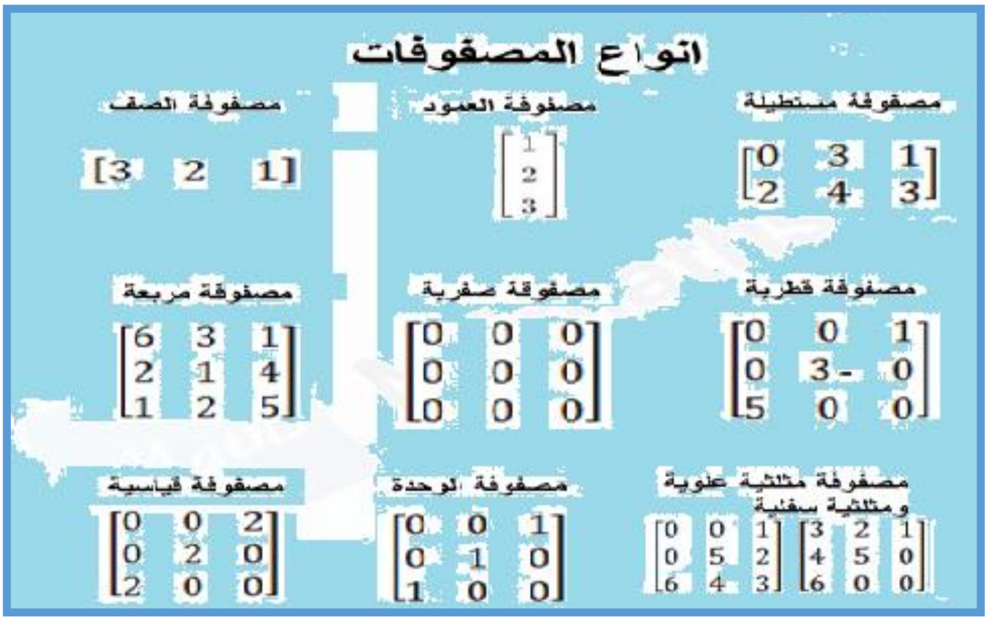
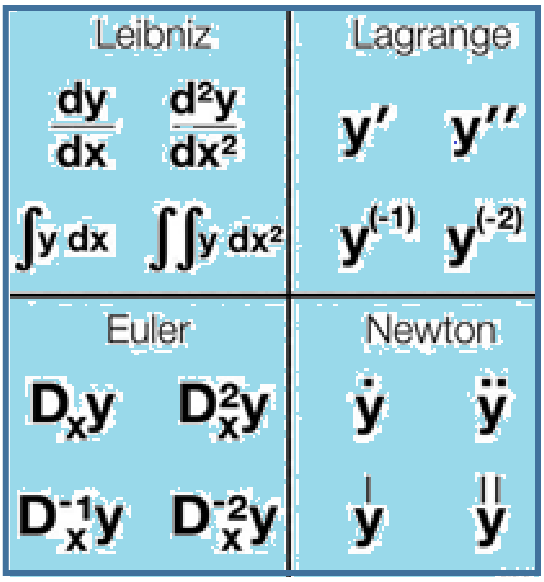
الرياضيات للصف الثالث الثانوي



المنهج المقرر للعام الدراسي 2025-2026

وحل تمرينات الكتاب المدرسي



العام الدراسي : 2025 - 2026

أ . حسين شعث

الاشتقاق" التفاضل "

إذا كانت د دالة حقيقية معرفة بالمعادلة ص = د(س) ، ه ∋ نطاق د فإن مشتقة د عند ه يرمز لها بالرمز دَ (ه) وتقرأ (د شرطة ه) أو بشكل آخر

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\text{د}(\text{س}) \right)$$

حيث " $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، أ $\text{ص}'$ ، أ $\text{د}'(\text{س})$ ، أ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\text{د}(\text{س}) \right)$ ، أ $\text{نها}_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ "

كلها تدل على تفاضل الدالة "المشتقة الأولى للدالة "

قواعد الاشتقاق :

(1) إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}}$ فإن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\ \text{س}^{\text{ن}-1}$$

مثال (1):-

(أ) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{5}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 5\ \text{س}^{5-1} = 5\ \text{س}^{4}$

(ب) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{-2}$ فإن

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -2\ \text{س}^{-2-1} = -2\ \text{س}^{-3}$

(2) إذا كانت ص = ك حيث ك مقدار ثابت فإن

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ أي أن مشتقة الدالة الثابتة = صفر

مثال (2):-

(أ) ص = - 5 ⟵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

(ب) ص = 100 ⟵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

(3) إذا كانت $\text{ص} = \text{ك}\ \text{س}^{\text{ن}}$ "حيث ك مقدار ثابت" دالة قابلة للاشتقاق فإن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك} \times \text{ن}\ \text{س}^{\text{ن}-1}$$

مثال (3):-

$\text{ص} = 3\ \text{س}^{5}$ ⟵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3 \times 5\ \text{س}^{4} = 15\ \text{س}^{4}$

(4) كثيرة الحدود :

إذا كان $\text{ص} = \text{د}_1(\text{س}) \pm \text{د}_2(\text{س}) \pm \dots \pm \text{د}_{\text{ن}}(\text{س})$ دالة قابلة للاشتقاق فإن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'_1(\text{س}) \pm \text{د}'_2(\text{س}) \pm \dots \pm \text{د}'_{\text{ن}}(\text{س})$$

مثال (4):-

(أ) $\text{ص} = 3\ \text{س}^{2} + 5\ \text{س}$ فإن

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 6\ \text{س} + 5$

(ب) $\text{ص} = \text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\text{س}^{-3} + 4$ فإن

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{3}{2}\text{س}^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\text{س}^{-4} + 0$

(5) إذا كانت ص = [د(س)]^{ن} فإن :

$$\frac{ءص}{ءس} = ن[د(س)]^{ن-1} \; د´(س)$$

أي أن مشتقة القوس المرفوع لقوة = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس

مثال (5) :-

(أ) ص = (س^2 + 5 س)^7

$\frac{ءص}{ءس}$ = 7 (س^2 + 5 س)^6 (2 س + 5)

(ب) ص = (5 س^3 + 3 س^2 + س)$^{\frac{1}{5}}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{1}{5}$ (5 س^3 + 3 س^2 + س)$^{\frac{-4}{5}}$ (15 س^2 +6 س + 1)

(6) إذا كانت ص = $\sqrt{د (س)}$ فإن :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{د' (س)}{2\sqrt{د (س)}}$$

أي أن مشتقة الجذر ألتربيعي = $\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2\times\text{الجذر نفسه}}$

مثال (6) :-

(أ) ص = $\sqrt{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$

(ب) ص = $\sqrt{12 + س^2}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{2س}{2\sqrt{12 + س^2}} = \frac{س}{\sqrt{12 + س^2}}$

(7) المشتقات الثانية والعليا :

إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ ، أ، **ص′** ، أ، **د′ (س)** هي المشتقي الأولي للدالة

فإن $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ ، أ، **ص″** ، أ، **د″ (س)** هي المشتقي الثانية للدالة

مثال (7) :-

(أ) ص = $\frac{1}{س}$

ص′ = $\frac{-1}{س^2}$

ص″ = $\frac{2}{س^3}$

(ب) ص = 5 س^3 + 3 س^2 + س

ص′ = 15 س^2 + 6 س + 1

ص″ = 30 س + 6

تفاضل حاصل الضرب

إذا كانت د$_1$ ، د$_2$ أي دالتين قابلتين للاشتقاق

وكان ص = د$_1$(س) . د$_2$(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن

$\frac{ءص}{ءس}$ = د$_1$(س) . دَ$_2$(س) + د$_2$(س) . دَ$_1$ (س)

أي أن مشتقة حاصل ضرب دالتين = الأولي × تفاضلِ الثاني + الثاني × تفاضلِ الأولي

د$_1$(س) دَ$_2$(س) د$_2$(س) دَ$_1$ (س)

مثال (1)

أوجد $\frac{ء}{ءس}$ (س + 1)(س + 2)^3

الحل:

$\frac{ء}{ءس}$ (س + 1)(س + 2)^3 = (س + 1) × 3 (س + 2)^2 + (س + 2)^3 × 1

= (س + 2)^2 (3 س + 3 + س + 2) عامل مشترك (س + 2)^2 وفك باقي الأقواس

= (س + 2)^2 (4 س + 5) جمع الحدود المتشابهه

مثال (2) :

أوجد $\frac{ء}{ءس}$ 4 س^2(1 + س)^3

الحل:

$\frac{ء}{ءس}$ 4 س^2(1 + س)^3 = 4 س^2 × 3 (1 + س)^2 + (1 + س)^3 × 8 س

= 4 س (1 + س)^2 (3 س + 2 + 2 س) عامل مشترك 4 س (1 + س)^2

= 4 س (1 + س)^2 (5 س + 2)

تمرين 3 هـ

1- باستخدام قاعدة الضرب في التفاضل، أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

(أ) $\text{س}^3(\text{س}+2)^2$ (ب) $(1-\text{س}^2)(\text{س}+2)^3$

(جـ) $(\text{س}+3)^2(2\text{س}-1)^3$ (د) $\text{س}\,(1-2\text{س})^{-1}$

(هـ) $\frac{2}{(1-\text{س})^4}$ (و) $\sqrt{\text{س}}\,(3\text{س}^2+1)^2$

(ز) $(1-3\text{س})^2(1+\text{س})^{\frac{1}{2}}$

2- فاضل ما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) $(3\text{س}^3-\frac{9}{2}\text{س})(\frac{3}{2}\text{س})^{-1}$

(ب) $(1-\text{س})^2(1+\text{س}+\text{س}^2)$

(إرشاد: اختصر أولًا)

(جـ) $(3\text{س}^2+2\text{س}-1)^2$ (د) $\frac{2}{\text{س}}(1-3\text{س})^3$

(أ) $\text{س}^3(2+\text{س})^2$

الحل:

$\frac{ء}{ء\text{س}}\text{س}^3(2+\text{س})^2 = \text{س}^3\times 2(2+\text{س}) + (2+\text{س})^2 \times 3\text{س}^2$

$= \text{س}^2(2+\text{س})(2\text{س}+6+3\text{س})$ عامل مشترك $\text{س}^2(2+\text{س})$

$= \text{س}^2(2+\text{س})(6+5\text{س})$ جمع الحدود المتشابهه

(ب) $(1-\text{س}^2)(\text{س}+2)^3$

الحل:

$\frac{ء}{ء\text{س}}(1-\text{س}^2)(\text{س}+2)^3 = (1-\text{س}^2)\times 3(\text{س}+2)^2 + (\text{س}+2)^3\times -2\text{س}$

$= (\text{س}+2)^2(3-3\text{س}^2-2\text{س}^2-4\text{س})$ عامل مشترك $(\text{س}+2)^2$

$= (\text{س}+2)^2(3-4\text{س}-5\text{س}^2)$ جمع الحدود المتشابهه

(جـ) $(\text{س}+3)^2(2\text{س}-1)^3$

الحل:

$\frac{ء}{ء\text{س}}(\text{س}+3)^2(2\text{س}-1)^3 = (\text{س}+3)^2\times 3(2\text{س}-1)^2\times 2 + (2\text{س}-1)^3\times 2(\text{س}+3)$

$= (\text{س}+3)(2\text{س}-1)^2\,[\,6(\text{س}+3)+2(2\text{س}-1)\,]$ عامل مشترك

$= (\text{س}+3)(2\text{س}-1)^2(6\text{س}+18+4\text{س}-2)$ فك الأقواس

$= (\text{س}+3)(2\text{س}-1)^2(10\text{س}+16)$ جمع الحدود المتشابهه

$= 2(\text{س}+3)(2\text{س}-1)^2(5\text{س}+8)$ اخذ عامل مشترك 2 من القوس الأخير

(د) $\text{س}\,(1-2\text{س})^{-1}$

الحل:

$$\frac{ء}{ء\text{س}}\,\text{س}(1-2\text{س})^{-1} = \text{س}\times -1\,(1-2\text{س})^{-2}\times -2 + (1-2\text{س})^{-1}\times 1$$

عامل مشترك $(1-2\text{س})^{-2}$

$$= (1-2\text{س})^{-2}\,\big(2\text{س} + (1-2\text{س})\big)$$

بعد اخذ العامل المشترك

$$= \frac{1}{(1-2\text{س})^{2}} \times (2\text{س} + 1 - 2\text{س}) = \frac{1}{(1-2\text{س})^{2}}$$

(هـ) $\dfrac{2}{(1-\text{س})^{4}}$

الحل:

$$\frac{ء}{ء\text{س}}\,2(1-\text{س})^{-4} = -8\,(1-\text{س})^{-5}\times -1$$

$$= \frac{8}{(1-\text{س})^{5}}$$

اصبح المقدار $(1-\text{س})^{-4}$ بسط وتغيرت إشارة الأس إلى سالب

بعد التفاضل نزلنا المقدار إلي المقام مره آخري ليصبح أسه موجب

(و) $\sqrt{\text{س}}\,(3\text{س}^2+1)^2$

الحل:

$$\frac{ء}{ء\text{س}}\,\sqrt{\text{س}}\,(3\text{س}^2+1)^2 = \sqrt{\text{س}}\times 2(3\text{س}^2+1)\times 6\text{س} + (3\text{س}^2+1)^2 \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{\text{س}}}{2\sqrt{\text{س}}} \times 12\text{س}\,\sqrt{\text{س}}\,(3\text{س}^2+1) + \frac{(3\text{س}^2+1)^2}{2\sqrt{\text{س}}}$$

ضربنا الحد الأول × $\dfrac{2\sqrt{\text{س}}}{2\sqrt{\text{س}}}$ لتوحيد المقام واخذ عامل مشترك

$$= \frac{(3\text{س}^2+1)}{2\sqrt{\text{س}}}\,(24\text{س}^2 + 3\text{س}^2 + 1)$$

العامل المشترك هو $\dfrac{(3\text{س}^2+1)}{2\sqrt{\text{س}}}$

$$= \frac{(3\text{س}^2+1)}{2\sqrt{\text{س}}}\,(27\text{س}^2+1) = \left(\frac{3\text{س}^2+1}{\sqrt{\text{س}}}\right)\left(\frac{27\text{س}^2+1}{2}\right)$$

بعد جمع الحدود المتشابهه

(ز) $(1-3\text{س})^2\,(1+\text{س})^{\frac{1}{2}}$

الحل:

$$\frac{ء}{ء\text{س}}\,(1-3\text{س})^2(1+\text{س})^{\frac{1}{2}} = (1-3\text{س})^2 \times \frac{1}{2}(1+\text{س})^{-\frac{1}{2}} + (1+\text{س})^{\frac{1}{2}} \times 2(1-3\text{س})\times -3$$

$$= \frac{(1-3\text{س})^2}{2\sqrt{1+\text{س}}} - 6\sqrt{1+\text{س}}\,(1-3\text{س}) \times \frac{\sqrt{1+\text{س}}}{\sqrt{1+\text{س}}}$$

لأخراج عامل مشترك

$$= \frac{(1-3\text{س})}{2\sqrt{1+\text{س}}}\,\big[(1-3\text{س}) - 12(1+\text{س})\big]$$

عامل مشترك

$$= \frac{(1-3\text{س})}{2\sqrt{1+\text{س}}}\,(-11-15\text{س}) = \frac{(3\text{س}-1)(11+15\text{س})}{2(1+\text{س})^{\frac{1}{2}}}$$

(2) فاضل ما يأتي بالنسبة إلى س :

(أ) $(3\text{س}^3 - \frac{9}{2}\text{س})(\frac{3}{2}\text{س})^{-1}$

الحل:

$\frac{d}{d\text{س}}(3\text{س}^3 - \frac{9}{2}\text{س})(\frac{3}{2}\text{س})^{-1} = \frac{d}{d\text{س}}(3\text{س}^3 - \frac{9}{2}\text{س})(\frac{2}{3\text{س}})$

$= \frac{d}{d\text{س}}(2\text{س}^2 - 3) = 4\text{س}$

لاحظ أن $(\frac{3}{2}\text{س})^{-1} = (\frac{2}{3\text{س}})$
ضربنا $(\frac{2}{3\text{س}}) \times (3\text{س}^3 - \frac{9}{2}\text{س})$
$= (2\text{س}^2 - 3)$

(ب) $(1 - \text{س})^2(1 + \text{س} + \text{س}^2)$

الحل:

$\frac{d}{d\text{س}}(1 - \text{س})^2(1 + \text{س} + \text{س}^2) = (1 - \text{س})^2(1 + 2\text{س}) + (1 + \text{س} + \text{س}^2) \times 2(1 - \text{س}) \times -1$

$= (1 - \text{س})[(1 - \text{س})(1 + 2\text{س}) - 2(1 + \text{س} + \text{س}^2)]$ عامل مشترك (1 – س)

$= (1 - \text{س})[1 + 2\text{س} - \text{س} - 2\text{س}^2 - 2 - 2\text{س} - 2\text{س}^2]$

$= (1 - \text{س})(-1 - \text{س} - 4\text{س}^2) = (\text{س} - 1)(1 + \text{س} + 4\text{س}^2)$

(جـ) $(3\text{س}^2 + 2\text{س} - 1)^2$

الحل:

$\frac{d}{d\text{س}}(3\text{س}^2 + 2\text{س} - 1)^2 = 2(3\text{س}^2 + 2\text{س} - 1)(6\text{س} + 2)$

$= 4(3\text{س} + 1)(3\text{س}^2 + 2\text{س} - 1)$

عامل مشترك 2 من (6س + 2)

(د) $\frac{2}{\text{س}}(1 - 3\text{س})^3$

الحل :

$\frac{d}{d\text{س}}[\frac{2}{\text{س}}(1 - 3\text{س})^3] = \frac{2}{\text{س}} \times 3(1 - 3\text{س})^2 \times -3 + (1 - 3\text{س})^3 \times \frac{-2}{\text{س}^2}$

$= \frac{-2}{\text{س}^2}(1 - 3\text{س})^2(9\text{س} + 1 - 3\text{س})$

$= \frac{-2(1 + 6\text{س})(1 - 3\text{س})^2}{\text{س}^2}$

$\frac{d}{d\text{س}}(\frac{1}{\text{س}}) = \frac{-1}{\text{س}^2}$

عامل مشترك $\frac{-2}{\text{س}^2}(1 - 3\text{س})^2$

تفاضل خارج القسمة

إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ أي دالتين قابلتين للاشتقاق فإن

ص = $\frac{د_1}{د_2}$ (س) = $\frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $د_2(س) \neq 0$ دالة قابلة للاشتقاق فإن

فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د_2(س) \times د_1'(س) - د_1(س) \times د_2'(س)}{\left(د_2(س)\right)^2}$

أي أن مشتقة خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\text{المقام تربيع}}$

مثال (1) :

أوجد $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{س}{س-2}\right)$

الحل :

$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{س}{س-2}\right) = \frac{(س-2)\times 1 - س \times 1}{(س-2)^2}$

$= \frac{س - 2 - س}{(س-2)^2} = \frac{-2}{(س-2)^2}$

مثال (2) :

اوجد $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{3س}{2س+1}\right)$

الحل :

$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{3س}{2س+1}\right) = \frac{(2س+1)\times 3 - 3س \times 2}{(2س+1)^2}$

$= \frac{6س+3 - 6س}{(2س+1)^2} = \frac{3}{(2س+1)^2}$

تمرين 3-و

1- أوجد المعامل التفاضلي لكل مما يأتي، اختصر وحلل الإجابات كلما كان ذلك ممكنا:

(أ) $\frac{4س+1}{س-1}$

(ب) $\frac{3س+2}{1-س}$

(جـ) $\frac{1+س}{1+س^2}$

(د) $\frac{3س^2}{1-2س}$

(هـ) $\frac{1+2س}{2+س^3}$

(و) $\frac{س}{(1+س)^2}$

2- فاضل كلا مما يأتي إلى س :

(أ) $\frac{\sqrt{س}}{1+2س}$

(ب) $\frac{\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}}$

(جـ) $\frac{3س+2}{\sqrt{س+1}}$

(د) $\frac{(1-س)^2}{1-س^2}$

(هـ) $\frac{\frac{1}{س}}{(1-س)^2}$

(1)

(أ) ($\frac{4س+1}{س-1}$)

الحل :

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{4س+1}{س-1}\right) = \frac{(س-1)\times 4 - (4س+1)\times 1}{(س-1)^2}$$

$$= \frac{4س-4-4س-1}{(س-1)^2}$$

$$= \frac{-5}{(س-1)^2}$$

(ب) ($\frac{3س+2}{1-س}$)

الحل :

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{3س+2}{1-س}\right) = \frac{(1-س)\times 3 - (3س+2)\times -1}{(1-س)^2}$$

$$= \frac{3-3س+3س+2}{(1-س)^2}$$

$$= \frac{5}{(1-س)^2}$$

(جـ) $\left(\dfrac{1+\text{س}}{1+\text{س}^2}\right)$

الحل :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{1+\text{س}}{1+\text{س}^2}\right)=\frac{(1+\text{س}^2)\times 1-(1+\text{س})\times 2\text{س}}{(1+\text{س}^2)^2}$$

$$=\frac{1+\text{س}^2-2\text{س}-2\text{س}^2}{(1+\text{س}^2)^2}$$

$$=\frac{1-2\text{س}-\text{س}^2}{(1+\text{س}^2)^2}$$

(د) $\left(\dfrac{3\text{س}^2}{1-2\text{س}}\right)$

الحل :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{3\text{س}^2}{1-2\text{س}}\right)=\frac{(1-2\text{س})\times 6\text{س}-3\text{س}^2\times -2}{(1-2\text{س})^2}$$

$$=\frac{6\text{س}-12\text{س}^2+6\text{س}^2}{(1-2\text{س})^2}$$

$$=\frac{6\text{س}-6\text{س}^2}{(1-2\text{س})^2}=\frac{6\text{س}(1-\text{س})}{(1-2\text{س})^2}$$

(هـ) $\left(\dfrac{1+2\text{س}}{2+\text{س}^3}\right)$

الحل :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{1+2\text{س}}{2+\text{س}^3}\right)=\frac{(2+\text{س}^3)\times 2-(1+2\text{س})\times 3\text{س}^2}{(2+\text{س}^3)^2}$$

$$=\frac{4+2\text{س}^3-3\text{س}^2-6\text{س}^3}{(2+\text{س}^3)^2}$$

$$=\frac{4-3\text{س}^2-4\text{س}^3}{(2+\text{س}^3)^2}$$

(و) $\dfrac{\text{س}}{(1+\text{س})^2}$

الحل :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\ \frac{\text{س}}{(1+\text{س})^2}=\frac{(1+\text{س})^2\times 1-\text{س}\times 2(1+\text{س})}{(1+\text{س})^4}$$

$$=\frac{(1+\text{س})(1+\text{س}-2\text{س})}{(1+\text{س})^4}$$

$$=\frac{(1+\text{س})(1-\text{س})}{(1+\text{س})^4}$$

$$=\frac{(1-\text{س})}{(1+\text{س})^3}$$

(2)

(أ) $\left(\dfrac{\sqrt{\text{س}}}{1+2\text{س}}\right)$

الحل:

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\sqrt{\text{س}}}{1+2\text{س}}\right)=\frac{(1+2\text{س})\times\dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}}}-\sqrt{\text{س}}\times 2}{(1+2\text{س})^2}$$

$$=\frac{(1+2\text{س}-4\text{س})\dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}}}}{(1+2\text{س})^2}$$

$$=\frac{(1-2\text{س})}{2\sqrt{\text{س}}\,(1+2\text{س})^2}$$

(ب) $\left(\dfrac{\sqrt{س}}{1 + \sqrt{س}} \right)$

الحل:

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}} \right) = \frac{(1+\sqrt{س}) \times \frac{1}{2\sqrt{س}} - \sqrt{س} \times \frac{1}{2\sqrt{س}}}{(1+\sqrt{س})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{س}}(1+\sqrt{س} - \sqrt{س})}{(1+\sqrt{س})^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{س}\,(1+\sqrt{س})^2}$$

(جـ) $\left(\dfrac{3س + 2}{\sqrt{س + 1}} \right)$

الحل:

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{3س+2}{\sqrt{س+1}} \right) = \frac{\sqrt{س+1} \times 3 - (3س+2) \times \frac{1}{2\sqrt{س+1}}}{(\sqrt{س+1})^2}$$

$$= \frac{6س + 6 - 3س - 2}{2\sqrt{س+1}\,(س+1)} = \frac{3س + 4}{2(س+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(د) $\dfrac{(1 - س)^2}{1 - س^2}$

الحل:

$$\frac{(1-س)^2}{1-س^2} = \frac{(1-س)^2}{(1+س)(1-س)}$$

$$= \frac{(1-س)}{(1+س)}$$

$$\frac{ء}{ءس}\frac{(1-س)}{(1+س)} = \frac{-(1+س) - (1-س)}{(1+س)^2}$$

$$= \frac{-1 - س - 1 + س}{(1+س)^2}$$

$$= \frac{-2}{(1+س)^2}$$

(هـ) $\dfrac{\frac{1}{س}}{(1 - س)^2}$

الحل :

$$\frac{ء}{ءس}\,\frac{\frac{1}{س}}{(1-س)^2} = \frac{(1-س)^2 \times \frac{-1}{س^2} - \frac{1}{س} \times -2(1-س)}{(1-س)^4}$$

$$= \frac{(1-س)(-1 + س + 2س)}{س^2(1-س)^4}$$

$$= \frac{(3س - 1)}{س^2(1-س)^3}$$

تمارين :

(1) أوجد المعامل التفاضلي لكل مما يأتي :

(1) $(س + 1)(س + 2)^2$

(2) $\sqrt{س}\,(3س^2 + 1)$

(3) $(2 + \frac{س}{3})(1 - س)^6$

(4) $(س + 1)(س^2 + 2س + 1)$

(5) $(س - 2)\sqrt{1 - س^2}$

(6) $\frac{1}{س^2}(1 + س)^3$

(7) $(3س^2 - 1)(س^3 + 1)^2$

(8) $(س^2 + س)(س - 1)^3$

(9) $(س^3 + س^2)(س + 1)^{-2}$

(10) $س^2\sqrt{2س - 1}$

(2) أوجد المعامل التفاضلي لكل مما يأتي :

(1) $(\frac{س^2}{س + 2})$

(2) $(\frac{1 + 2س}{2 + س^3})$

(3) $\frac{1 + س}{(2 + س)^2}$

(4) $(\frac{1 - 3س}{1 + 2س})$

(5) $(\frac{س^3}{2س + 1})$

(6) $(\frac{1 - س^2}{1 + س^2})$

(7) $(\frac{(1 + س)^2}{(1 + \sqrt{س})})$

(8) $\frac{س^2 + 1}{(1 + س)^2}$

(9) $\frac{(1 - س)^2}{1 + س}$

(10) $(\frac{1 - 3س}{\sqrt{1 + س}})$

تفاضل الدوال الضمنية

الدالة الصريحة هي الدالة التي نجد المتغير س في طرف ، ص في الطرف الآخر بمعامل 1 واسها 1
مثل ص = 2 س + 7
أما الدالة الضمنية التي يكون بها س ، ص في نفس الطرف مثل $س^2 + ص^2 = 5$

لاحظ أن $\frac{ء}{ء س} س^ن = ن س^{ن-1}$ ولكن $\frac{ء}{ء س} ص^ن = ن ص^{ن-1} \frac{ء ص}{ء س}$

$ص = س^2 + 2 س + 2$ تسمى دالة صريحة

$2 س^2 ص^2 + 2 س ص^3 + 2 = 0$ تسمى دالة ضمنية

$ص = \sqrt{س}$ دالة صريحة ولكن $ص^2 = س$ أصبحت دالة ضمنية

تمرين 3-3

(1) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

(أ) $س^2 - ص^2 = 2$

(ب) $ص^2 = س^2 - 2س$

(جـ) $\frac{1}{س} - \frac{1}{ص} = 1$

(د) $\sqrt{س} - \sqrt{ص} = 1$

(هـ) $2س^2 - س ص + ص^2 + 3ص - 2 = 0$

(2) إذا كان $س^2 - ص^2 + 10س - 5ص + 19 = 0$ ، فأوجد $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ عندما $\frac{ءص}{ءس} = 0$.

(1)

(أ) $س^2 - ص^2 = 2$

الحل:

$2 س - 2 ص \frac{ء ص}{ء س} = 0$

$2 س = 2 ص \frac{ء ص}{ء س}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{2 س}{2 ص}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{س}{ص}$

(ب) $ص^2 = س^2 - 2 س$

الحل :

$2 ص \frac{ء ص}{ء س} = 2 س - 2$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{2 (س - 1)}{2 ص}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(س - 1)}{ص}$

(جـ) $\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{ص}} = 1$

الحل:

$$\text{س}^{-1} - \text{ص}^{-1} = 1$$

$$-\text{س}^{-2} + \text{ص}^{-2}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$$

$$\text{ص}^{-2}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{-2}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}^{2}}{\text{س}^{2}}$$

(د) $\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}} = 1$

الحل:

$$\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} - \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}} = \sqrt{\frac{\text{ص}}{\text{س}}}$$

(هـ) $2\text{س}^{2} - \text{س ص} + \text{ص}^{2} + 3\text{ص} - 2 = 0$

الحل:

$$4\text{س} - \left(\text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}\right) + 2\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 3\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$$

$$4\text{س} - \text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{ص} + 2\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 3\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\,(2\text{ص} - \text{س} + 3) = \text{ص} - 4\text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص} - 4\text{س}}{(2\text{ص} - \text{س} + 3)}$$

(2) إذا كان $\text{س}^{2} - \text{ص}^{2} + 10\text{س} - 5\text{ص} + 19 = 0$ فأوجد $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}$ عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

الحل:

$$2\text{س} - 2\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 10 - 5\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0 \Leftarrow (1)$$

نفاضل المعادلة (1) مرة آخرى

$$2 - 2\left(\text{ص}\,\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) - 5\,\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = 0$$

$$2 - 2\text{ص}\,\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} - 2\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{2} - 5\,\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = 0$$

$$(2\text{ص} + 5)\,\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = 2 - 2\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{2}$$

عندما

ص = -2 ، س = -5 ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ فإن $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = 2$

عندما

ص = -3 ، س = -5 ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ فإن $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = -2$

عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

$$2\text{س} - 2\text{ص} \times 0 + 10 - 5 \times 0 = 0$$

$$2\text{س} + 10 = 0$$

$$\text{س} = -5$$

نعوض في المعادلة الأصلية عن س لإيجاد ص

$$(-5)^{2} - \text{ص}^{2} + 10 \times -5 - 5\text{ص} + 19 = 0$$

$$25 - \text{ص}^{2} - 50 - 5\text{ص} + 19 = 0$$

$$\text{ص}^{2} + 5\text{ص} + 6 = 0$$

$$(\text{ص} + 3)(\text{ص} + 2) = 0$$

ص = -3 أ، ص = -2

تمارين :

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي :

(1) $س^2 + ص^2 = 25$

(2) $س^2 ص - 2 = 0$

(3) $س^2 ص^3 + 2 س = 0$

(4) $س^2 + ص^2 + 2 س ص - 1 = 0$

(5) $س^2 + 2 س ص + 3 ص^2 = 1$

(6) $س^3 - ص^2 - س + 3 = 0$

ميل المنحنى

تعرف المشتقة الأولى للدالة د (س) عند النقطة ($س_1$, $ص_1$) بإنها ميل المماس المرسوم لمنحنى الدالة د (س) عند تلك النقطة

$\frac{ء ص}{ء س}\Big|_{(س_1 , ص_1)}$ = ميل المماس للمنحنى عند النقطة ($س_1$, $ص_1$) ويرمز للميل بالرمز م

معادلة المماس : ص - $ص_1$ = م (س - $س_1$)

معادلة العمودي : ص - $ص_1$ = $\frac{-1}{م}$ (س - $س_1$)

ملاحظة :

1) المستقيم يوازي محور السينات أي أن الميل = صفر " م = 0 "
2) المستقيم يوازي محور الصادات أي ان الميل كمية غير معرفه $\frac{1}{0}$
3) المستقيمان متوازيان أي ان لهم نفس الميل
4) المستقيمان متعامدان أي ان حاصل ضرب ميليهما = -1

مثال :

أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى ص = 4 $س^2$ + 2 س – 1 عند النقطة حيث س = $\frac{1}{2}$

الحل :

عندما س = $\frac{1}{2}$ ص = 4 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ + 2 $\left(\frac{1}{2}\right)$ – 1 = 1

النقطة على المنحنى ($\frac{1}{2}$ ، 1)

$\frac{ء ص}{ء س}$ = 8 س + 2

$م_{س=\frac{1}{2}}$ = 8 × $\frac{1}{2}$ + 2 = 6 ميل المماس = 6 ، ميل العمودي = - $\frac{1}{6}$

معادلة المماس ص - $ص_1$ = م (س - $س_1$)

ص – 1 = 6 (س - $\frac{1}{2}$)

ص – 1 = 6 س – 3

6 س – ص – 2 = 0

معادلة العمودي ص - $ص_1$ = $\frac{-1}{م}$ (س - $س_1$)

ص – 1 = $\frac{-1}{6}$ (س - $\frac{1}{2}$)

6 ص – 6 = - س + $\frac{1}{2}$

2 س + 12 ص – 13 = 0

تمرين 3-ي

(1) أوجد ميل ومعادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المعطاة:

(أ) $ص = س^2 - س - 1$ ، $س = 1$ (ب) $ص = \frac{3}{2}س^2 - 4س + 3$ ، $س = 2$

(جـ) $ص = 3س + \frac{4}{س}$ ، $س = -2$

(2) أوجد إحداثيات النقط على المنحنى $ص = س^3 - \frac{9}{2}س^2 + 6س - 2$ حيث يوازي المماس محور السينات.

(3) إذا كان ميل المنحنى $ص = 4س^3 - س^2 + س$ عند النقطة (أ ، ب) يساوي 3، فأوجد قيمة كل من أ ، ب.

(4) أوجد ميل المنحنى $ص = س(س - 2)^2 + 3$ عند النقطة (2، 3). أوجد أيضًا إحداثيات النقط على المنحنى التي الميل عندها يساوي -1.

(5) المنحنى $ص = س(س - 1)(س - 2)$ يقطع محور السينات في ثلاث نقط. أوجد إحداثيات هذه النقط. واثبت أن الميل عند نقطتين من هذه النقط متساوٍ . أوجد معادلة المماس لهذا المنحنى عند النقطة حيث $س = 0$.

(6) المنحنى $ص = أ س^3 + ب س^2 + جـ$ يمر بالنقط (-1، 0)، (0، 5) والمماس للمنحنى يوازي المحور س عند النقط التي لها $س = 0$ ، $س = 1$. احسب قيمة كل من أ ، ب ، جـ وارسم شكلًا تخطيطيًّا للمنحنى.

(7) ق هي النقطة (4، 7) على المنحنى $ص = س^2 - 6س + 15$.
أوجد ميل المنحنى عند ق، معادلة المماس عند هذه النقطة. المماس عند نقطة أخرى ط عمودي على المماس عند ق. احسب الإحداثي السيني للنقطة ط.

(8) أوجد ميل المنحنى $ص = (3 - س^2)^5$ عند النقطة التي عندها $س = 2$. من ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

(9) إذا كان $ص = 4س + \frac{1}{س}$، فأوجد النقط على المنحنى حيث المماسات توازي محور السينات.

(10) النقطة (ق، ط) على المنحنى $ص^2 = 4س + 5$ فوق محور السينات بحيث يكون الميل عند (ق، ط) يساوي $\frac{2}{3}$. أوجد:

(أ) قيمة كل من ق، ط (ب) معادلة المماس للمنحنى عند (ق، ط)

(جـ) نقطة تقاطع هذا المماس مع محور الصادات.

(1)

(أ) ص = $س^2$ – س – 1 ، س = 1

الحل:

م = $\frac{ءص}{ءس}$ = 2 س - 1

$م_{س=1}$ = 2 × 1 – 1 = 1   م = 1

لأيجاد معادلة المماس نوجد قيمة ص عندما س = 1

ص = 1 – 1 – 1 = - 1   **م = 1 والنقطة (1 ، - 1)**

معادلة المماس هي ص – $ص_1$ = م (س – $س_1$)

ص – (- 1) = 1 ×(س – 1)

ص + 1 = س – 1

س – ص – 2 = 0

(ب) ص = $\frac{3}{2}$ $س^2$ – 4 س + 3 ، س = 2

الحل:

م = $\frac{ءص}{ءس}$ = 3 س - 4

$م_{س=2}$ = 3 × 2 – 4 = 2   م = 2

لأيجاد معادلة المماس نوجد قيمة ص عندما س = 2

ص = $\frac{3}{2}$ × $(2)^2$ – 4 × 2 + 3 = 1   **م = 2 والنقطة (2 ، 1)**

معادلة المماس هي ص – $ص_1$ = م (س – $س_1$)

ص – (1) = 2 ×(س – 2)

ص – 1 = 2 س – 4

2 س – ص – 3 = 0

(جـ) ص= 3 س + $\frac{4}{س}$ ، س = - 2

الحل:

م = $\frac{ءص}{ءس}$ = 3 − $\frac{4}{س^2}$

م$_{س=-2}$ = 3 − $\frac{4}{(-2)^2}$ = 2 م = 2

لأيجاد معادلة المماس نوجد قيمة ص عندما س = - 2

ص = 3× (-2) + $\frac{4}{-2}$ = - 8 **م = 2 والنقطة (- 2 ، - 8)**

معادلة المماس هي ص – ص$_1$ = م (س – س$_1$)

ص + 8 = 2 ×(س + 2)

ص + 8 = 2 س + 4

2 س – ص – 4 = 0

(2) أوجد إحداثيات النقط على المنحنى ص = س^3 - $\frac{9}{2}$ س^2 + 6 س – 2 حيث يوازي المماس محور السينات .

الحل:

المماس يوازي محور السينات م = 0

م = $\frac{ءص}{ءس}$ = 3 س^2 - 9 س + 6

0 = 3 س^2 - 9 س + 6 بالقسمة على 3

س^2 - 3 س + 2 = 0

(س – 1)(س – 2) = 0 ⟸ س = 1 ، س = 2

عندما س = 1

ص = 1^3 - $\frac{9}{2}$ × 1^2 + 6 × 1 – 2 = $\frac{1}{2}$ النقطة (1 ، $\frac{1}{2}$)

عندما س = 2

ص = 2^3 - $\frac{9}{2}$ × 2^2 + 6 × 2 – 2 = 0 النقطة (2 ، 0)

إحداثيات النقط { (1 ، $\frac{1}{2}$) ، (2 ، 0) }

(3) إذا كان ميل المنحنى ص = 4 س^{3} - س^{2} + س عند النقطة (ا ، ب) يساوي 3 ، فأوجد قيمة كل من ا ، ب

الحل:

م = 3 وعند النقطة (ا ، ب)

ص = 4 س^{3} - س^{2} + س

م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 12 س^{2} - 2 س + 1

3 = 12 س^{2} - 2 س + 1

12 س^{2} – 2 س – 2 = 0 بالقسمة على 2

6 س^{2} – س – 1 = 0

(3 س + 1)(2 س – 1) = 0 ⟸ س = $\frac{-1}{3}$ ، س = $\frac{1}{2}$

عندما س = $\frac{-1}{3}$ ⟸ ص = 4 × ($\frac{-1}{3}$)^{3} - ($\frac{-1}{3}$)^{2} + $\frac{-1}{3}$ = $\frac{-16}{27}$ النقطة ($\frac{-1}{3}$ ، $\frac{-16}{27}$)

عندما س = $\frac{1}{2}$ ⟸ ص = 4 × ($\frac{1}{2}$)^{3} - ($\frac{1}{2}$)^{2} + $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{4}$ النقطة ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$)

إحداثيات النقط { ($\frac{-1}{3}$ ، $\frac{-16}{27}$) ، ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$) }

(4) أوجد ميل المنحنى ص = س (س – 2)^{2} + 3 عند النقطة (2 ، 3) . اوجد أيضاً إحداثيات النقط على المنحنى التي الميل عندها يساوي -1

الحل:

م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س × 2(س – 2) + (س –)2^{2}

م$_{\text{س}=2}$ = 2 × 2(2 – 2) + (2 –)2^{2} = 0 ⟸ **م = 0**

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س × 2 (س – 2) + (س –)2^{2}

= 2 س^{2} – 4 س + س^{2} – 4 س + 4

= 3 س^{2} – 8 س + 4

لأيجاد إحداثيات النقط على المنحنى التي عندما م = - 1

3 س^{2} – 8 س + 4 = - 1

3 س^{2} – 8 س + 5 = 0

(س – 1)(3 س – 5) = 0 ⟸ س = 1 ، س = $\frac{5}{3}$

عندما س = 1 ص = 1 × (1 –)2^{2} + 3 = 4 النقطة (1 ، 4)

عندما س = $\frac{5}{3}$ ص = $\frac{5}{3}$ × ($\frac{5}{3}$ –)2^{2} + 3 = $\frac{86}{27}$ النقطة ($1\frac{2}{3}$ ، $3\frac{5}{27}$)

إحداثيات النقط { (1 ، 4) ، ($1\frac{2}{3}$ ، $3\frac{5}{27}$) }

(5) المنحنى ص = س (س – 1) (س – 2) يقطع محور السينات في ثلاث نقط . أوجد إحداثيات هذه النقط . واثبت أن الميل عند نقطتين من هذه النقط متساوٍ . أوجد معادلة المماس لهذا المنحنى عند النقطة حيث س = 0 .

الحل:

المنحنى يقطع محور السينات عندما ص = 0

س (س – 1)(س – 2) = 0 ⟸ س = 0 ، س = 1 ، س = 2

(0 ، 0) ، (1 ، 0) ، (2 ، 0)

ص = $س^3$ – 3 $س^2$ + 2 س ⟸ م = $\frac{ءص}{ءس}$ = 3 $س^2$ – 6 س + 2

$م_{س=0}$ = 2

$م_{س=1}$ = 3 – 6 + 2 = **-1**

$م_{س=2}$ = 12 – 12 + 2 = **2** $م_{س=0}$ = $م_{س=2}$

عند س = 0 م = 2 عند النقطة (0 ، 0) ص – 0 = 2 (س – 0) **∴ ص = 2 س**

(6) المنحنى ص = أ $س^3$ + ب $س^2$ + جـ يمر بالنقط (-1 ، 0) ، (0 ، 5) والمماس للمنحنى يوازي المحور س عند النقط التي لها س = 0 ، س = 1 . احسب قيمة كل من أ ، ب ، جـ وارسم شكلاً تخطيطياً للمنحنى .

الحل:

ص = ؟ $س^3$ + ب $س^2$ + جـ

عند النقطة (- 1 ، 0) يكون 0 = - ؟ + ب + جـ

؟ = ب + جـ ⟸ (1)

عند النقطة (0 ، 5)

جـ = 5 ⟸ (2)

نعوض عن (2) في (1)

؟ = ب + 5 ⟸ (3)

المماس يوازي محور السينات أي ان م = 0

م = 3 ؟ $س^2$ +2 ب س

0 = 3 ؟ $س^2$ +2 ب عندما س = 1

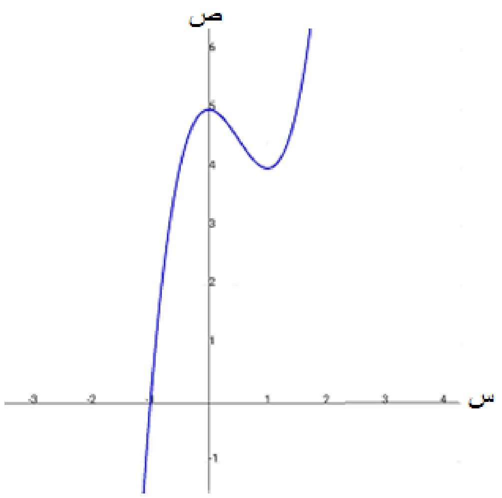
3 ؟ +2 ب = 0 ⟸ (4)

بالتعويض عن (3) في (4) فيكون 3 (ب + 5) +2 ب = 0

5 ب = - 15 ⟸ ب = - 3

بالتعويض في المعادلة رقم (3) ⟸ ؟ = - 3 + 5 ⟸ ؟ = 2

؟ = 2 ، ب = - 3 ، جـ = 5



(7) ق هي النقطة (4 ، 7) على المنحنى ص = س^{2} – 6 س + 15
أوجد ميل المنحنى عند ق ، معادلة المماس عند هذه النقطة . المماس عند نقطة أخرى ط عمودي على المماس عند ق . احسب الإحداثي السيني للنقطة ط .

الحل:

م = $\frac{ءص}{ءس}$ = 2 س - 6

م$_{س=4}$ = 2 ×4 – 6 = 2 م$_{المماس}$ = **2** ، م$_{العمودي}$ = $\frac{-1}{2}$

معادلة المماس : ص – 7 = 2 (س – 4) أ، **2 س – ص – 1 = 0**

لأيجاد الأحداثي السيني عند ط

م = 2 س – 6

$\frac{-1}{2}$ = 2 س – 6 بضرب المعادلة × 2 للتخلص من المقام " الكسر "

-1 = 4 س - 12 ⟸ **س = $2\frac{3}{4}$**

(8) أوجد ميل المنحنى ص = (3 - س^{2})^{5} عند النقطة التي عندها س = 2 . من ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة .

الحل:

م = $\frac{ءص}{ءس}$ = 5 (3 - س ^{2})^{4}×(- 2 س)

م$_{س=2}$ = 5 (3 - 2^{2})^{4}×(- 2 × 2) **م = - 20**

لأيجاد معادلة المماس نوجد قيمة ص عندما س = 2

ص = (3 - 2^{2})^{5} = –1 **م = –20 والنقطة (2 ، –1)**

معادلة المماس هي ص – ص$_{1}$ = م (س – س$_{1}$)

ص + 1 = - 20 ×(س – 2)

ص + 1 = - 20 س + 40 **20 س + ص – 39 = 0**

(9) إذا كان ص = 4 س + $\frac{1}{س}$ ، فأوجد النقط على المنحنى حيث المماسات توازي محور السينات .

الحل:

المماس يوازي محور السينات

م = 0

م = $\frac{ءص}{ءس}$ = 4 − $\frac{1}{س^2}$

0 = 4 − $\frac{1}{س^2}$ بضرب حدود المعادلة × $س^2$

4 $س^2$ = 1 ، أ $س^2$ = $\frac{1}{4}$ ⟸ س = ± $\frac{1}{2}$

عندما س = $\frac{1}{2}$ عندما س = $\frac{-1}{2}$

ص = 4 × $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ = **4** ، ص = 4 × $\frac{-1}{2}$ + $\frac{1}{\frac{-1}{2}}$ = **− 4**

($\frac{1}{2}$ ، 4) (- $\frac{1}{2}$ ، - 4)

إحداثيات النقط { **($\frac{1}{2}$ ، 4) ، ($\frac{-1}{2}$ ، − 4)** }

(10) النقطة (ق ، ط) على المنحنى $ص^2$ = 4 س + 5 فوق محور السينات بحيث يكون الميل عند (ق ، ط) يساوي $\frac{2}{3}$. اوجد:

(أ) قيمة كل من ق ، ط (ب) معادلة المماس للمنحنى عند (ق ، ط)

(جـ) نقطة تقاطع هذا المماس مع محور الصادات .

الحل:

(أ) 2 ص $\frac{ءص}{ءس}$ = 4

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{2}{ص}$ ∵ الميل عند (ق ، ط) يساوي $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ = $\frac{2}{ص}$ ⟸ **ص = 3**

بالتعويض في المعادلة الأصلية

$ص^2$ = 4 س + 5 ⟸ 9 = 4 س + 5 ⟸ **س = 1**

النقطة هي **(1 ، 3)**

(ب) معادلة المماس للمنحنى عند (1 ، 3) عندما م = $\frac{2}{3}$

ص − $ص_1$ = م (س − $س_1$)

ص − 3 = $\frac{2}{3}$ ×(س − 1)

3 ص − 9 = 2 س − 2 **2 س − 3 ص + 7 = 0**

(جـ) نقطة تقاطع هذا المنحني مع محور الصادات وهي عندما س = 0

$ص^2$ = 5 ⟸ ص = ± $\sqrt{5}$ ولكن فوق محور الصادات ص = $\sqrt{5}$

النقطة هي **(0 ، 2 $\frac{1}{3}$)**

تمارين :

(1) إذا كان ص = 2 $س^3$ – 21 $س^2$ + 78 س – 98 ، فأحسب :

(أ) الميل عند النقطة (3 ، 1) .

(ب) الإحداثي السيني للنقطة التي يكون المماس للمنحنى عندها موازياً المماس عند (3 ، 1) .

(2) إذا كان $ص^2$ = 3 (س – 2) ، فأوجد معادلة المماس عند نقطة المنحنى التي عندها س = 5

(3) أوجد إحداثيات النقط على المنحنى ص = $س^3$ + $س^2$ حيث الميل يساوي 1 .

(4) الميل عند النقطة (1 ، 3) على المنحنى ص = أ $س^3$ + ب س هو -1 .فأحسب قيمة كل من أ ، ب

(5) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى 2 $س^2$ - $ص^2$ = 18 عند النقطة (0 ، 3) .

محيطات ومساحات وحجوم بعض الأشكال الهندسية

الشكل الهندسي	مساحته " م " او حجمه " ح " او محيطه " ط "
المربع	م = ل^2 ط = 4 ل
المستطيل	م = الطول × العرض ط = 2 (الطول + العرض)
متوازي المستطيلات	ح = الطول × العرض × الارتفاع م = 2 (الطول × العرض + الطول × الارتفاع + العرض × الارتفاع)
المكعب	ح = ل^3 م = 6 ل^2
الدائرة	م = π نق^2 ط = 2 π نق
الكرة	ح = $\frac{4}{3}$ π نق^3 م = 4 π نق^2
الاسطوانة	ح = π نق^2 ع م$_{\text{المنحنية}}$ = 2 π نق ع م$_{\text{الكلية}}$ = 2 π نق ع + 2 π نق^2
المخروط	ح = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع
المثلث	م = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الأرتفاع م$_{\text{متساوي الأضلاع}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2 ط = مجموع اطوال أضلاعه
طول القوس	ل = $\frac{\theta}{360}$ × طول القوس
مساحة القطاع	م$_{\text{القطاع}}$ = $\frac{\theta}{360}$ × مساحة الدائرة

معدل التغير

إذا كان $\frac{ءس}{ءن}$ معدل تغير س بالنسبة إلى الزمن ن ، وأن ص = د(س) ، فإن معدل تغير ص بالنسبة إلى ن يعطى بالعلاقة :

$$\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءن}$$

إذا علم $\frac{ءص}{ءن}$ ، معدل تغير ص بالنسبة إلى الزمن ن ، $\frac{ءس}{ءن}$ يمكن إيجاده كما سبق .

معدل التغير السالب هو نقصان في مقدار الكمية المتضمنة كلما يتزايد الزمن .

مثال (1) :

تتحرك نقطة على منحنى الدالة ص = س^3 فإذا تغير الإحداثي السيني بمعدل $\frac{1}{2}$ وحدة / ث فأوجد معدل تغير الإحداثي الصادي بالنسبة للزمن عندما س = 1

الحل:

ص = س^3

$\frac{ءص}{ءن} = 3$ س$^2 \times \frac{ءس}{ءن}$

$\frac{ءص}{ءن} = 3 \times 1 \times \frac{1}{2}$

$\frac{ءص}{ءن} = \frac{3}{2}$

مثال (2) :

متوازي مستطيلات من الثلج مساحته السطحية الكلية م = 4 س^3 سم^2 وكانت تتناقص بمعدل 3 سم^2 / ث عندما س = 5 سم فأوجد معدل تناقص س .

الحل:

م = 4 س^3

$\frac{ءم}{ءن} = 12$ س$^2 \times \frac{ءس}{ءن}$ ، $\frac{ءم}{ءن} = -3$ سم^2/ث

$-3 = 12 \times 5^2 \times \frac{ءس}{ءن}$

$\frac{ءس}{ءن} = \frac{-3}{12 \times 25}$

$\frac{ءس}{ءن} = \frac{-1}{100}$

$\frac{ءس}{ءن} = -0.01$

مثال (3) :

عندما يكون طول نصف قطر دائرة 4 سم ، يزيد محيطه بمعدل 0.5 سم / ث . اوجد المعدل الذي تتزايد به المساحة في هذه اللحظة .

الحل:

نق = 4 سم ، $\frac{ءط}{ءن}$ = 0.5 سم / ث ، $\frac{ءم}{ءن}$ = ؟

$\frac{ءم}{ءن}$ = نق × $\frac{ءط}{ءن}$

$\frac{ءم}{ءن}$ = 4 × 0.5 = 2 سم^2 / ث

مثال (4) :

يتزايد حجم بالون كروي بمعدل 14 سم^3 / ث .مع الاحتفاظ بشكله الكروي أوجد معدل الزيادة في مساحة سطح البالون في اللحظة التي يكون فيها طول نصف القطر 7 سم .

الحل:

$\frac{ءم}{ءن}$ = $\frac{2}{نق}$ × $\frac{ءح}{ءن}$

$\frac{ءم}{ءن}$ = $\frac{2}{7}$ × 14 = 4 سم^2 / ث

مثال (5) :

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة بانتظام فإذا كانت مساحتها تزداد بمعدل 5 سم^2 / ث . فأوجد معدل التغير في محيطها في اللحظة التي تكون مساحتها 400 سم^2 .

الحل:

نفرض ان المحيط ط أي ان $\frac{ءط}{ءن}$ هو معدل تغير المحيط

، م المساحة أي ان معدل تغير المساحة $\frac{ءم}{ءن}$ ، ل هو طول الضلع

∴ $\frac{ءط}{ءن}$ = $\frac{2}{ل}$ × $\frac{ءم}{ءن}$

$\frac{ءط}{ءن}$ = $\frac{2}{20}$ × 5 = $\frac{1}{2}$ سم / ث

تمرين 4-أ

(أترك الاجابات بدلالة π ما أمكن)

(1) يزداد طول ضلع مكعب بمعدل 2 سم/ث. أوجد معدل زيادة الحجم عندما يكون طول كل ضلع 8 سم.

(2) يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل 2 سم/ث. أوجد معدل الزيادة في

(أ) المحيط (ب) المساحة

عندما يكون طول نصف القطر 10 سم.

(3) يتزايد حجم بالون كروي بمعدل 100 سم^3/ث. أوجد معدل تغير طول نصف القطر عندما يكون طول نصف القطر 5 سم. (حجم الكرة ح حيث ح = $\frac{4}{3}$ π نق^3).

(4) تتناقص مساحة سطح كرة بمعدل 20 سم^2/ث عندما يكون طول نصف القطر 15 سم. احسب معدل تغير:

(أ) طول نصف القطر (ب) الحجم في هذه اللحظة

(مساحة سطح الكرة م حيث م = 4 π نق^2)

(5) طول مستطيل يساوي دائمًا 4 أمثال عرضه. إذا تزايد العرض بمعدل 0.5 سم/ث، فأوجد معدل زيادة المساحة عندما يكون العرض 10 سم.

(6) صب رمل على أرض أفقية بمعدل 4 سم^3/ث وكون كومة على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه ثلاثة أرباع طول نصف قطر دائرته. احسب معدل تغير طول نصف القطر عندما يكون طول نصف القطر 4 سم.

(1) يزداد طول ضلع مكعب بمعدل 2 سم / ث . اوجد معدل زيادة الحجم عندما يكون طول كل ضلع 8 سم .

الحل:

نفرض ان ل طول ضلع المكعب حيث ل = 8 سم , $\frac{ءل}{ءن}$ = 2 سم/ث

ح = ل^3

$\frac{ءح}{ءن}$ = 3 ل^2 × $\frac{ءل}{ءن}$

$\frac{ءح}{ءن}$ = 3 × 8^2 × 2 = **384 سم^3/ ث**

(2) يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل 2 سم / ث . أوجد معدل الزيادة في

(أ) المحيط (ب) المساحة

عندما يكون طول نصف القطر 10 سم .

الحل:

أ) نفرض أن المحيط ط أي ان ط = 2 π نق

$\frac{ءط}{ءن}$ = 2 π × $\frac{ءنق}{ءن}$ ولكن $\frac{ءنق}{ءن}$ = 2 سم/ث

$\frac{ءل}{ءن}$ = 2 π **= 4** π × 2 **سم/ث**

ب) نفرض ان المساحة م أي أن م = π نق^2

$\frac{ءم}{ءن}$ = 2 π نق × $\frac{ءنق}{ءن}$ ولكن $\frac{ءنق}{ءن}$ = 2 سم/ث

$\frac{ءم}{ءن}$ = 2 π **40 =** 10 × 2 × π **سم^2/ث**

(3) يتزايد حجم بالون كروي بمعدل 100 سم^3 / ث . أوجد معدل تغير طول نصف القطر

عندما يكون طول نصف القطر 5 سم (حجم الكرة ح حيث ح = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3)

الحل :

ح = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = 4 π نق^2 × $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ ولكن $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = 100 سم^3 / ث

100= 4 5^2 × π × $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

100 = 100 π × $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ بالقسمة على 100 π $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ = $\frac{1}{\pi}$ **سم / ث**

(4) تتناقص مساحة سطح كرة بمعدل 20 سم^2 / ث عندما يكون طول نصف القطر 15 سم . احسب معدل تغير :

(أ) طول نصف القطر (ب) الحجم في هذه اللحظة (مساحة سطح الكرة م حيث م = 4 π نق^2)

الحل :

(أ) م = 4 π نق^2

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = 8 π نق× $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$

- 20 = 8 15 × π ×$\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ بالقسمة على 120 π

$\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ = $\frac{-20}{120\pi}$ ⟸ $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ = $\frac{-1}{6\pi}$

$\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ = $\frac{1}{6\pi}$ **بالتناقص**

ب) ح = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = 4 π نق^2 × $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ = $\frac{-1}{6\pi}$

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = 4 15^2 × π × $\frac{-1}{6\pi}$

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = – 150

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = **150 سم^3 / ث بالتناقص**

(5) طول مستطيل يساوي دائماً 4 أمثال عرضه . إذا تزايد العرض بمعدل 0.5 سم / ث ، فأوجد معدل زيادة المساحة عندما يكون العرض 10 سم .

الحل:

م = الطول × العرض ونفرض ان العرض هو س ∴ الطول = 4 س

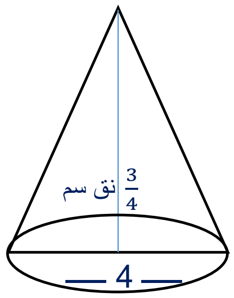
م = 4 س × س = 4 س^2

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}$= 8 س × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = 0.5 سم/ ث

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = 8 س × 0.5

= 8 × 10 × 0.5 = **40 سم^2/ ث**

(6) صب رمل على أرض أفقية بمعدل 4 سم^3 / ث وكون كومة على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه ثلاثة ارباع طول نصف قطر دائرته . احسب معدل تغير طول نصف القطر عندما يكون طول نصف القطر 4 سم (حجم المخروط ح = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع)



الحل : ح = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع ، ح = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الأرتفاع

∴ ح = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 × $\frac{3}{4}$ نق

ح = $\frac{1}{4}\pi$ نق^3

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{3}{4}\pi$ نق^2 × $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ ولكن $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = 4 سم^3 / ث

$4 = \frac{3}{4}\, 4^2 \times \pi \times \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ ، $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{1}{3\pi}$ سم / ث

تمارين :

(1) عندما يكون طول نصف قطر دائرة 5 سم ، يزيد محيطها بمعدل 0.5 سم / ث ، أوجد المعدل الذي تتزايد به المساحة في هذه اللحظة .

(2) يتغير طولا نصفي قطري دائرتين متحدتي المركز بمعدل $\frac{1}{2}$ سم / ث عندما يكون طولا نصفي القطرين 4 سم ، 12 سم احسب معدل تغير المساحة بين الدائرتين في هذه اللحظة .

(3) يتناقص حجم مكعب طول ضلعه ل سم بمعدل 12 سم^3 / ث عندما ل = 5 . أوجد معدل تناقص ل في هذه اللحظة

النقطة المحلية

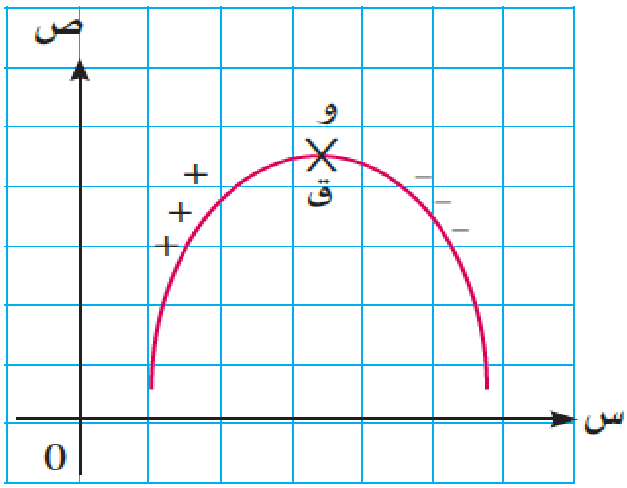
هي النقطة التي عندها الميل يساوي صفر أي $\frac{ء ص}{ء س} = 0$ كما في الشكل الآتى فيه النقط المحليه ق ، ك .

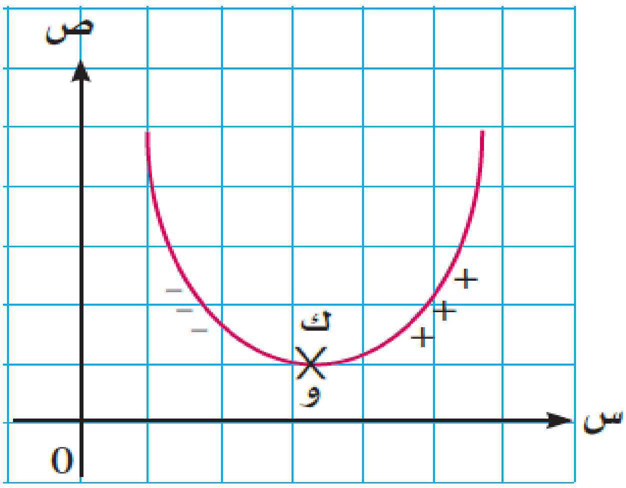
<u>النقطة العظمى :</u>

إذا كان الميل يتغير من موجب إلي صفر إلي سالب كلما تتزايد س حول النقطة المحلية . تكون النقطة نقطة عظمى مثل النقطة ق في الشكل الآتى .

<u>النقطة الصغرى :</u>

إذا كان الميل يتغير من سالب إلي صفر إلي موجب كلما تتزايد س حول النقطة المحلية . تكون النقطة نقطة صغرى مثل النقطة ك في الشكل الآتى .





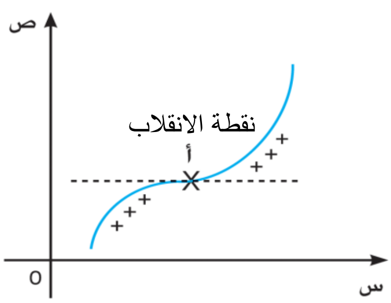
ملاحظة :

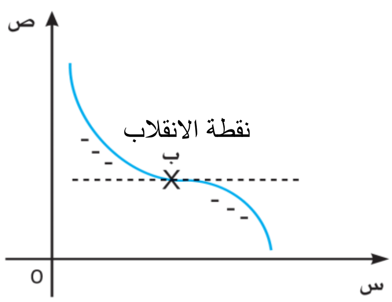
النقط العظمى والصغرى تسمى نقط رجوع .

<u>نقطة الانقلاب :</u>

إذا تغير ميل المنحنى من موجب إلى صفر ثم إلى موجب مرة أخرى أو من سالب إلى صفر ثم سالب مرة أخرى كلما تتزايد س حول النقطة المحلية ، فإن النقطة تسمى نقطة أنقلاب .

لإيجاد نقطة الإنقلاب نجعل $\frac{ء^2 ص}{ء س^2} = 0$





خطوات الحل لإيجاد النقط المحلية :

1) نوجد المشتقة الأولى للمنحنى $\frac{ءص}{ءس}$

2) نساوي المشتقة الأولي بالصفر $\frac{ءص}{ءس} = 0$

3) نوجد قيم المجهول سواء س او غيره

4) نأخذ القيم التى اوجدناها ونعوض بها في المعادلة الأصلية قبل الإشتقاق لنوجد المتغير التابع فيصبح عندنا نقطة وهى النقطة المحليه او النقطة الحرجه .

أختبار النهايه عظمى ام صغرى :

أ) **اختبار المشتقة الأولى :**

1(نرسم خط الاعداد ونضع عليه النقاط المحليه " الحرجه " ونعوض في المشتقه الأولى نأخذ نقطه قبل النقطه الحرجه مباشره ونرى هل هي موجبه ام سالبه وكذلك بعد النقطه الحرجه مباشره ونرى هل هي موجبه ام سالبه

2(نأخذ من اليسار إلي اليمين إذا كانت الإشارة سالبه قبل النقطه الحرجه ثم موجبه بعد النقطه الحرجه تكون النهايه صغرى وإذا كانت الإشارة موجبه قبل النقطه الحرجه ثم سالبه بعد النقطه الحرجه تكون النهايه عظمى.

ب) **اختبار المشتقة الثانية :**

1(إذا كان $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ سالب عند نقطة على المنحنى تكون النقطة نقطة عظمى .

2(إذا كان $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ موجبة عند نقطة على المنحنى تكون النقطة نقطة صغرى .

3(إذا كان $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = 0$ يفشل الأختبار (نستخدم في هذه الحالة اختبار المشتقة الأولى)

تمرين 4 جـ

(1) في المنحنيات الآتية:

(1) أوجد النقط المحلية

(2) حدد إذ كانت نقطًا عظمى أو نقطًا صغرى أو نقط انقلاب.

(أ) $ص = س^2 + 1$ (ب) $ص = 2 - س^2$

(جـ) $ص = س^3$ (د) $ص = س^3 - 2س^2 + س$

(هـ) $ص = 1 + 24\frac{1}{س} - 2س^3$ (و) $ص = 2س(1 - س)^4$

(2) أوجد النقط المحلية وحدد إن كانت نقطًا عظمى أو نقطًا صغرى أو نقط انقلاب:

(أ) $ص = س^4 - 1$ (ب) $ص = س - 2\sqrt{س}$

(جـ) $ص = س^3 - 6س + 2$ (د) $ص = (س - \frac{1}{2})(س - 2)(س + 2)$

(3) أوجد نقط الرجوع على المنحنى $ص = س^2 - س^3$، مع ذكر نوع هذه النقط.

(4) بين أن الدالة لها نهاية صغرى وليس لها نقطة انقلاب: $ص = س^4$.

(5) إذا كانت $ص = س^3 - 3س^2 - 9س + 1$ فأوجد:

(i) النهايات العظمى والصغرى .

(ii) الفترات التزايدية والفترات التناقصية .

(iii) نقط انقلاب إن وجدت.

(iv) ارسم رسما تخطيطيا لمنحنى الدالة.

(1) (أ) $ص = س^2 + 1$

الحل :

$\frac{ءص}{ءس} = 2س$

$\frac{ءص}{ءس} = 0$ ⟸ $2س = 0$

$س = 0$ ⟸ $ص = 1$

النقطة المحليه هي (0 ، 1)

$\frac{ءص}{ءس} = 2س$ (-) 0 (+)

(0 ، 1) هي نقطة محليه صغرى

(ب) ص = 2 - س^2

الحل :

$\frac{ءص}{ءس}$ = -2 س

$\frac{ءص}{ءس}$ = 0 ⟸ -2 س = 0

عندما س = 0 تكون ص = 2

النقطة المحليه هي (0 ، 2)

من موجب إلي سالب النهاية عظمي   (-)   0   (+) $\frac{ءص}{ءس}$ = -2 س

(0 ، 2) هي نقطة محليه عظمى

(جـ) ص = س^3

الحل :

$\frac{ءص}{ءس}$ = 3 س^2

$\frac{ءص}{ءس}$ = 0 ⟸ 3 س^2 = 0

عندما س = 0 تكون ص = 0

النقطة المحليه هي (0 ، 0)

(+)   0   (+) $\frac{ءص}{ءس}$ = 3 س^2

النقطة (0 , 0) نقطة انقلاب

(د) ص = س^3 – 2 س^2 + س

الحل :

$\frac{ءص}{ءس}$ = 3 س^2 – 4 س + 1

$\frac{ءص}{ءس}$ = 0 ⟸ 3 س^2 – 4 س + 1 = 0

(3 س – 1)(س – 1) = 0 ⟸ س = $\frac{1}{3}$ ، س = 1

عندما س = $\frac{1}{3}$ فإن ص = $\frac{4}{27}$ وعندما س = 1 تكون ص = 0

النقط المحليه هي ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{4}{27}$) ، (1 ، 0)

(+)   1   (-) $\frac{1}{3}$ (+) $\frac{ءص}{ءس}$ = 3 س^2 – 4 س + 1

($\frac{1}{3}$ ، $\frac{4}{27}$) هي نقطة محليه عظمى   (1 ، 0) هي نقطة محليه صغرى

(هـ) $\text{ص} = 1 + 24\,\text{س} - 2\,\text{س}^3$

الحل:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 24 - 6\,\text{س}^2$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0 \Longleftarrow 24 - 6\,\text{س}^2 = 0$ بالقسمة على -6

$\text{س}^2 - 4 = 0 \Longleftarrow (\text{س} - 2)(\text{س} + 2) = 0$ $\quad$ س = 2 ، س = -2

ص = 33 ، ص = -31

النقط المحليه هي (2 ، 33) ، (-2 ، -31)

سوف نوجد النقط المحليه العظمى والصغرى بإستخدام المشتقة الثانية

ص" = -12 س

س = 2 $\quad$ ص" = $-12 \times 2 = -24$ $\quad$ سالبه تعطى قيمه عظمى $\quad$ (2 ، 33) نقطة عظمى

س = -2 $\quad$ ص" = $-12 \times -2 = 24$ $\quad$ موجبه تعطى قيمه سالبه $\quad$ (-2 ، -31) نقطه صغرى

(و) $\text{ص} = 2\,\text{س}\,(1 - \text{س})^4$

الحل:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,\text{س} \times 4\,(1 - \text{س})^3 \times -1 + (1 - \text{س})^4 \times 2$

$= 2\,(1 - \text{س})^3\,(-4\,\text{س} + 1 - \text{س})$

$= 2\,(1 - \text{س})^3\,(1 - 5\,\text{س})$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0 \Longleftarrow 2\,(1 - \text{س})^3\,(1 - 5\,\text{س}) = 0$

س = 1 ، $\text{س} = \frac{1}{5}$

$\text{ص} = 2 \times 1\,(1 - 1)^4$ ، $\text{ص} = 2 \times \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^4 = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{2}{5} \times \frac{256}{625}$

ص = 0 ، $\text{ص} = \frac{512}{3125}$

النقط المحليه هي (1 ، 0) ، $\left(\frac{1}{5} ، \frac{512}{3125}\right)$



$(1 - \text{س})^3$	+	$\frac{1}{5}$	+	1	-
$(1 - 5\,\text{س})$	+		-		-
	(+)		(-)		(+)

$\left(\frac{1}{5} ، \frac{512}{3125}\right)$ نقطة عظمى ، (1 ، 0) نقطة صغرى

(2) (أ) ص = س^{4} - 1

الحل :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\,\text{س}^{3}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0 \Longleftarrow 4\,\text{س}^{3} = 0$

س = 0 $\Longleftarrow$ ص = -1

النقطة المحليه هي (0 ، -1)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\,\text{س}^{3}$ (-)   0   (+)

(0 ، -1) هي نقطة محليه صغرى

(ب) ص = س - 2$\sqrt{\text{س}}$

الحل :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 - \frac{2}{2\sqrt{\text{س}}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0 \Longleftarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} = 0$ بضرب المعادلة في $\sqrt{\text{س}}$

$\sqrt{\text{س}} = 1$ بتربيع الطرفين س = 1

عندما س = 1 تكون ص = -1 ، **النقطة المحليه هي (1 ، - 1)**

ص" = $\frac{1}{2\sqrt{\text{س}^{3}}}$

ص"$_{\text{س}=1}$ = $\frac{1}{2}$ موجبه تعطى قيمه صغرى (1 ، -1) نقطة صغرى

(جـ) $ص = س^{3} - 6س + 2$

الحل:

$\frac{ءص}{ءس} = 3س^{2} - 6$

$\frac{ءص}{ءس} = 0 \Leftarrow 3س^{2} - 6 = 0$ بالقسمة على 3

$س^{2} - 2 = 0 \Leftarrow (س - \sqrt{2})(س + \sqrt{2}) = 0$ أي ان $س = \pm\sqrt{2}$

عندما $س = \sqrt{2}$ $ص = (\sqrt{2})^{3} - 6\sqrt{2} + 2 = 2 - 4\sqrt{2}$ $(\sqrt{2} ، 2 - 4\sqrt{2})$

عندما $س = -\sqrt{2}$ $ص = (-\sqrt{2})^{3} + 6\sqrt{2} + 2 = 2 + 4\sqrt{2}$ $(-\sqrt{2} ، 2 + 4\sqrt{2})$

عن طريق اختبار المشتقة الثانية $ص'' = 6س$

عندما $س = \sqrt{2}$ $ص'' = 6\sqrt{2}$ موجبه تعطى قيمه صغرى عند النقطة $(\sqrt{2} ، 2 - 4\sqrt{2})$

عندما $س = -\sqrt{2}$ $ص'' = -6\sqrt{2}$ سالبه تعطى قيمه عظمى عند النقطة $(-\sqrt{2} ، 2 + 4\sqrt{2})$

(د) $ص = (س - \frac{1}{2})(س - 2)(س + 2)$

الحل:

$\frac{ءص}{ءس} = (س - 2)(س + 2) + (س - \frac{1}{2})(س + 2) + (س - \frac{1}{2})(س - 2)$

$\frac{ءص}{ءس} = س^{2} - 4 + س^{2} + 2س - \frac{1}{2}س - 1 + س^{2} - 2س - \frac{1}{2}س + 1 = 3س^{2} - س - 4$

$\frac{ءص}{ءس} = 0 \Leftarrow 3س^{2} - س - 4 = 0 \Leftarrow (3س - 4)(س + 1) = 0$ $س = 1\frac{1}{3}$ ، $س = -1$

$س = 1\frac{1}{3}$ ومنها $ص = (1\frac{1}{3} - \frac{1}{2})(1\frac{1}{3} - 2)(1\frac{1}{3} + 2) = -1\frac{23}{27}$ $(1\frac{1}{3} ، -1\frac{23}{27})$

$س = -1$ ومنها $ص = (-1 - \frac{1}{2})(-1 - 2)(-1 + 2) = 4\frac{1}{2}$ $(-1 ، 4\frac{1}{2})$

$ص''_{س=1\frac{1}{3}} = 6 \times \frac{4}{3} - 1 = 7$ موجبه تعطى قيمه صغرى عند النقطة $(1\frac{1}{3} ، -1\frac{23}{27})$

$ص''_{س=-1} = 6 \times (-1) - 1 = -7$ سالبة تعطى قيمه عظمى عند النقطة $(-1 ، 4\frac{1}{2})$

(3) أوجد نقط الرجوع على المنحنى ص = $\text{س}^2 - \text{س}^3$ ، مع ذكر نوع هذه النقط .

الحل:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س} - 3\text{س}^2$ وعندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ ⟸ $2\text{س} - 3\text{س}^2 = 0$

$\text{س}(2 - 3\text{س}) = 0$ ⟸ س = 0 عندها ص = 0 ، $\text{س} = \frac{2}{3}$ عندها $\text{ص} = \frac{4}{27}$

النقط المحليه هي (0 ، 0) ، $\left(\frac{2}{3} ، \frac{4}{27}\right)$

سوف نوجد النقط المحليه العظمى والصغرى بإستخدام المشتقة الثانية $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 2 - 6\text{س}$

س = 0 $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 2 - 6 \times 0 = 2$ موجبه تعطى قيمه صغرى عند النقطة (0 ، 0)

$\text{س} = \frac{2}{3}$ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 2 - 6 \times \frac{2}{3} = -2$ سالبه تعطى قيمه عظمى عند النقطة $\left(\frac{2}{3} ، \frac{4}{27}\right)$

(4) بين أن الدالة لها نهاية صغرى وليس لها نقطة انقلاب : ص = س^4 .

الحل:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\text{س}^3$ وعندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ ⟸ $4\text{س}^3 = 0$

س = 0 عندها ص = 0

النقط المحليه هي (0 ، 0)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\text{س}^3$ (-) 0 (+)

للدالة نهاية صغرى عند النقطة المحلية (0 , 0)

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 12\text{س}^2$ وعندما $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 0$ ⟸ $12\text{س}^2 = 0$

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 12\text{س}^2$ (+) 0 (+)

لم تغير الإشارة أي لاتوجد نقطة انقلاب

(5) إذا كانت ص = س^3 – 3 س^2 – 9 س + 1 فاوجد .

(i) النهاية العظمى والصغرى .

(ii) الفترات التزايدية والفترات التناقصية .

(iii) نقط انقلاب إن وجدت .

(iv) ارسم رسما تخطيطيا لمنحنى الدالة .

الحل:

(i) $\frac{ءص}{ءس}$ = 3 س^2 – 6 س – 9 وعندما $\frac{ءص}{ءس}$ = 0 ⟸ 3 س^2 – 6 س – 9 = 0 بالقسمة على 3

س^2 – 2 س – 3 = 0 ⟸ (س – 3) (س + 1) = 0

س = 3 ، س = -1

عندما س = 3 فإن ص = - 26 ، عندما س = -1 فإن ص = 6

النقط المحليه هي (3 ، - 26) ، (-1 ، 6)

سوف نوجد النقط المحليه العظمى والصغرى بإستخدام المشتقة الثانية $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = 6 س - 6

س = 3 $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = 6 × 3 - 6 = 12 موجبه تعطى نهاية صغرى عند النقطة (3 ، - 26)

س = -1 $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = 6 × -1 - 6 = - 12 سالبه تعطى نهاية عظمى عند النقطة (-1 ، 6)

(ii) فترات التزايد (∞ ، 3) (-1 ، - ∞)

فترات التناقص (3 ، -1)

(iii) $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = 6 س - 6

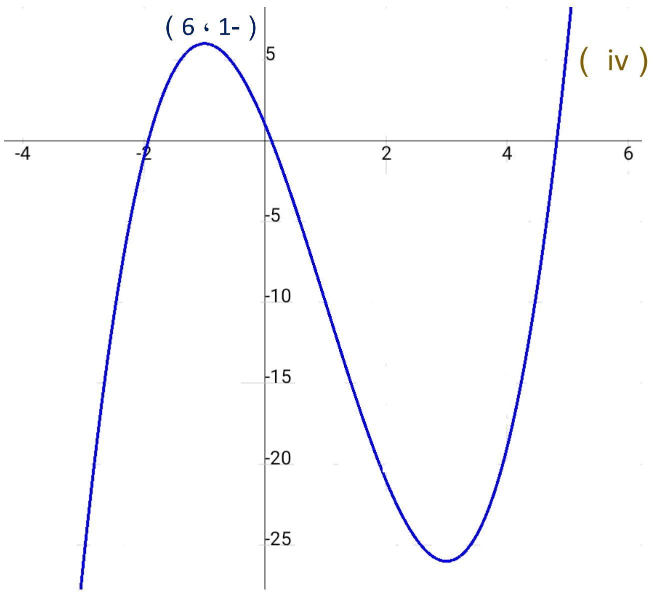
6 س – 6 = 0 بالقسمة على 6

س = 1

(+) 1 (-) $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = 6 س - 6

توجد نقطة انقلاب عند النقطة (1 ، - 10)

(iv)



تمارين :

(1) أوجد النقط المحلية

(2) حدد إذا كانت عظمى ام صغرى ام إنقلاب .

(1) ص = $س^2 - س - 2$ (2) ص = $س^3 - 3س + 1$

(3) ص = $س^4 - 2س^2 + 1$ (4) ص = $س + \frac{1}{س}$

(5) ص = $\frac{1}{س^2} + 16س$ (6) ص = $س^2 + \frac{1}{س}$

(7) ص = $\frac{س^3}{3} + س^2 - 3س - \frac{1}{3}$ (8) ص = $س(1 + س)^2$

(3) أوجد نقطة الانقلاب لكل من الدوال الآتية :

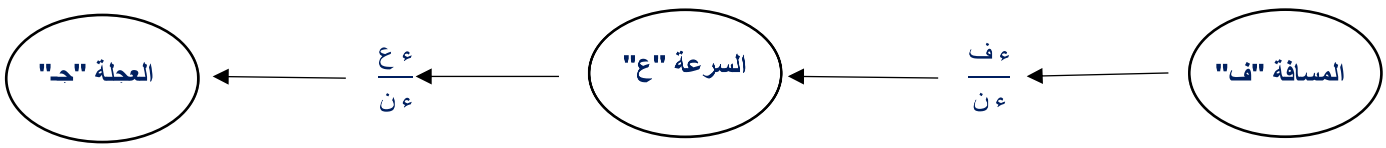
(1) ص = $س^3 - 6س^2 + 1$ (2) ص = $س^3 - 3س + 1$

السرعة والعجلة

إذا كان ف = د(ن) حيث ف بالأمتار ترمز للإزاحة و ن بالثانية ترمز للزمن ، للجسيم

فإن $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ يساوي سرعة الجسيم بالمتر / ث

فإذا رمزنا للسرعة بالرمز ع فإن $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ أ، $\frac{\text{ء}^2\text{ف}}{\text{ءن}^2}$ يساوي العجلة ، وسوف نرمز للعجلة بالرمز جـ وهي بوحدة م/ث^2



لاحظ أن :

1. عندما يسكن الجسيم لحظياً تكون ع = 0
2. عندما يصل الجسيم إلي اقصى ارتفاع تكون ع = 0
3. عند و تكون ف = 0 ، ن = 0
4. يكون الجسيم مرة أخرى عند و عندما ف = 0 ، ن ≠ 0

مثال (1)

بدأ جسيم حركته من نقطة ثابتة (و) في خط مستقيم بحيث يتعين بعده عن (و) بالمسافة (ف) متراً ، (ن) بالثوان بالعلاقة ف = 2 ن^3 – ن^2 + 5 أوجد عجلة الجسيم بعد 5 ثوان من بدء الحركة .

الحل :

السرعة : ع = 6 ن^2 – 2 ن

العجلة : جـ = 12 ن - 2

جـ$_{ن=5}$ = 12 × 5 - 2 = 58 م / ث^2

مثال (2)

بدأ جسيم حركته من نقطة ثابتة (و) في خط مستقيم بحيث يتعين بعده عن (و) بالمسافة (ف) متراً ، (ن) بالثوان بالعلاقة ف = ن^3 – 6 ن^2 + 9 ن أوجد عجلة الجسيم عندما يسكن لأول مرة

الحل :

يسكن الجسيم لحظياً عندما ع = 0

ع = 3 ن^2 – 12 ن + 9 نجعل ع = 0

0 = 3 ن^2 – 12 ن + 9 ⟸ 3 (ن – 1)(ن – 3) = 0

ن = 1 ، ن = 3 يسكن الجسيم لأول مرة عندما ن = 1

جـ = 6 ن - 12

جـ$_{ن=1}$ = 6 × 1 – 12 = - 6 متر / ث^2

مثال (3)

بدأ جسيم حركته من نقطة ثابتة (و) في خط مستقيم بحيث يتعين بعده عن (و) بالمسافة (ف) متراً ، (ن) بالثوان بالعلاقة $ف = ن^3 - 3ن^2 + 3ن + 3$ اثبت أن الجسيم يتوقف مرة واحدة

الحل :

يتوقف الجسيم عندما ع = 0

$ع = 3ن^2 - 6ن + 3$ نجعل ع = 0

$0 = 3ن^2 - 6ن + 3$ ⟸ $3(ن - 1)^2 = 0$

ن = 1 الجسيم يتوقف مرة واحدة عندما ن = 1

تمرين 4هـ:

(1) تعطى العلاقة بين الإزاحة ف متر لجسيم في زمن ن ثانية كالآتي:

$ف = ن^2 - 5ن$

أوجد إزاحة الجسيم عندما يسكن لحظيًا

(2) حركة جسم تعطى بالعلاقة ف = ن (3 − ن) حيث ف بالأمتار هي الإزاحة عن و، ن الزمن بالثواني بعد مروره بالنقطة و. إذا كانت سرعته ع متر كل ثانية، انقل وأكمل الجدول

ن	0	1	2	3	4
ف					
ع					

أجب عن الآتي:

(أ) في أي وقت يكون الجسم عند و؟

(ب) متى يكون الجسم في حالة سكون لحظيًا؟

(جـ) ما المسافة المقطوعة في الـ3 ثوان الأولى؟

(د) ما بعد الجسم عن و بعد 4 ثوان؟

(3) قذف جسم رأسيا إلى أعلى. ارتفاعه ف متر بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة $ف = 30ن - 10ن^2$. أوجد.

(أ) سرعته بدلالة ن م/ث.

(ب) ارتفاع الجسم وسرعته بعد $\frac{1}{2}$ ثانية.

(جـ) الزمن عندما يسكن الجسم لحظيًا.

(د) أقصى ارتفاع يصل إليه.

(هـ) الزمن الكلي للحركة.

(4) بدأ جسيم حركته من و في اتجاه و أ على خط مستقيم. مسافته، ف مترًا من و بعد زمن ن ثانية تعطى بالعلاقة $ف = ن(ن - 3)^2$. أوجد:

(أ) متى يكون الجسيم عند و مرة أخرى؟

(ب) الأوقات التي يقف عندها الجسيم لحظيًا.

(جـ) المسافة المقطوعة في الـ3 ثوان الأولى.

(د) المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة.

(هـ) الوقت عندما تساوي العجلة صفرًا.

(و) الفترة الزمنية التي تتناقص خلالها السرعة.

(1) تعطى العلاقة بين الإزاحة ف متر لجسيم في زمن ن ثانية كلآتي : ف = $ن^{2}$ – 5 ن

أوجد إزاحة الجسيم عندما يسكن لحظياً

الحل :

يسكن الجسيم لحظياً عندما السرعة تساوي صفر أي أن ع = $\frac{ءف}{ءن}$ = 0

$\frac{ءف}{ءن}$ = 2 ن – 5 ⟸ 2 ن – 5 = 0 ⟸ ن = $\frac{5}{2}$

عندما ن = $\frac{5}{2}$ فإن ف = $(\frac{5}{2})^{2}$ - 5 × $\frac{5}{2}$ = $\frac{25}{4}$ - $\frac{25}{2}$ = $\frac{50-25}{4}$

ف = - 6 $\frac{1}{4}$ م

(2) حركة جسم تعطى بالعلاقة ف = ن (3 – ن) حيث ف بالأمتار هي الإزاحة عن و ، ن الزمن بالثواني بعد مروره بالنقطة و . إذا كانت سرعته ع متر كل ثانية ، انقل وأكمل الجدول .

4	**3**	**2**	**1**	**0**	**ن**
					ف
					ع

أجب عن الآتي :

(أ) في أي وقت يكون الجسم عند و ؟

(ب) متى يكون الجسم في حالة سكون لحظياً ؟

(جـ) ما المسافة المقطوعة في الـ3 ثوان الأولى

(د) ما بعد الجسم عن و بعد 4 ثوان ؟

الحل:

4	3	2	1	0	ن
4-	0	2	2	0	ف
5-	3-	1-	1	3	ع

(أ) يكون الجسم عند و عندما ف = صفر

ن (3 – ن) = 0

ن = 0 ث و **ن = 3** ث

(ب) يكون الجسم في حالة سكون لحظى عندما ع = 0

ع = 3 – 2 ن

3 – 2 ن = 0 ⟸ ن = $\frac{3}{2}$ ث

∴ **ن = 1 $\frac{1}{2}$ ث**

(جـ) المسافة المقطوعة في ال 3 ثوان الأولى ؟

بعد 3 ثوان سوف يعود الجسم إلي النقطة و

لان 1 $\frac{1}{2}$ ثانية كان قد توقف لحظياً

أي وصل لابعد نقطة وبدء العودة

عندما ن = 1 $\frac{1}{2}$

$ف_{ن=1\frac{1}{2}}$ = $\frac{3}{2}$ (3 - $\frac{3}{2}$) = $\frac{9}{4}$

$ف_{ن=3}$ = 2 × $\frac{9}{4}$ = 4 $\frac{1}{2}$ م

(د) بعد الجسم عن و بعد 4 ثوان من الجدول

ف = -4 ولاتوجد مسافة بالسالب

∴ بعد الجسم عن و بعد 4 ثوان = **4 م**

(3) قذف جسم رأسيا إلى أعلى . ارتفاعه ف متر بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ف = 30 ن – 10 $ن^2$. أوجد

(أ) سرعته بدلالة ن م / ث . **(ب) ارتفاع الجسم وسرعته بعد $\frac{1}{2}$ ثانية .**

(جـ) الزمن عندما يسكن الجسم لحظياً . **(د) أقصى ارتفاع يصل إليه .**

(هـ) الزمن الكلي للحركة .

الحل :

(أ) ف = 30 ن – 10 $ن^2$

ع = 30 – 20 ن السرعة بدلالة ن

(ب) عندما ن = $\frac{1}{2}$

$ف_{ن=\frac{1}{2}} = 30 \times \frac{1}{2} - 10 \times (\frac{1}{2})^2$

$= 15 - \frac{10}{4} = \frac{60-10}{4} = \frac{50}{4}$

$ف_{ن=\frac{1}{2}} = \mathbf{12\frac{1}{2}}$ **م**

$ع_{ن=\frac{1}{2}} = 30 - 20 \times \frac{1}{2} = \mathbf{20}$

(جـ) يسكن الجسم لحظياً عندما ع = 0

∴ 30 – 20 ن = 0

20 ن = 30

ن = $1\frac{1}{2}$ ث

(د) أقصى ارتفاع يصل إليه عندما ع = 0 ، ن = $\frac{3}{2}$

ف = $30 \times \frac{3}{2} - 10 \times (\frac{3}{2})^2$

= $45 - \frac{45}{2}$

ف= $22\frac{1}{2}$ م

(هـ) الزمن الكلى للحركة = **$1\frac{1}{2}$** × 2 = **3** ثوان

(4) بدأ جسيم حركته من و في اتجاه و أ على خط مستقيم . مسافته ، ف متراً من و بعد زمن ن ثانية .
تعطى بالعلاقة ف = ن (ن – 3)^2 . اوجد :

(أ) متى يكون الجسيم عند و مرة أخرى ؟
(ب) الأوقات التي يقف عندها الجسيم لحظياً .
(جـ) المسافة المقطوعة في الـ3 ثوان الأولى .
(د) المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة .
(هـ) الوقت عندما تساوي العجلة صفراً .
(و) الفترة الزمنية التي تتناقص خلالها السرعة .

الحل:

(أ) يكون الجسيم عند و مرة أخرى عندما
ف = صفر ∴ ن (ن – 3)^2 = 0
إما ن = 0 ثانية ، أ ن = 3 ثانية
ن = 0 هذه نقطة البداية
∴ سيكون مرة أخرى عندما **ن = 3 ثوان**

(ب) الأوقات التي يقف عندها الجسيم لحظياً عندما ع = 0
ع = 3 (ن – 1) (ن – 3)
3 (ن – 1) (ن – 3) = 0
ن = 1 ث ، **ن = 3 ث**

(جـ) ن : 0 ⟵ 1 ⟵ 2 ⟵ 3
4 متر ، -2 متر ، -2 متر
لاتوجد مسافة بالسالب ∴ 2 متر ، لاتوجد مسافة بالسالب ∴ 2 متر
ف = 4 + 2 + 2 = **8 م**

(د) المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة -2
المسافة = **2 متر**

(هـ) الوقت عندما العجلة تساوي صفر
جـ = 6 (ن – 2) ، عندما جـ = 0
6 (ن – 2) = 0 ⟸ **ن = 2 ث**

(و) الفترة الزمنية التي تتناقص خلالها السرعة
تتناقص السرعة من الفترة ن = **0** إلى ن = **2**

ن	0	1	2	3	4
ف	0	4	2	0	4
ع	9	0	3-	0	9
جـ	12-	6-	0	6	12

تمرين :

المسافة لجسيم من نقطة معلومة وتعطى بالعلاقة ف = $\frac{ن^3}{3}$ - ن^2 ، حيث المسافة ف بالأمتار
والزمن ن بالثانية بعد المرور بالنقطة و .
(أ) متى يكون الجسيم مرة أخرى عند و ؟
(ب) ما الأوقات التي يكون عندها الجسيم في حالة سكون لحظي ؟
(جـ) أوجد المسافات التي يبتعد بها الجسيم عن و في هذه الأوقات

النسب المثلثية الأساسية:

جاθ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، ظاθ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

النسب المثلثية للزوايا الخاصة :

°0 ، °30 ، °45 ، °60 ، °90

الزاوية °0 : °0 :	جا°0 = 0	جتا°0 = 1	ظا°0 = 0
الزاوية °30 : $\frac{\pi}{6}$:	جا°30 = $\frac{1}{2}$	جتا°30= $\frac{\sqrt{3}}{2}$	ظا°30= $\frac{\sqrt{3}}{3}$
الزاوية °45 : $\frac{\pi}{4}$:	جا°45 = $\frac{\sqrt{2}}{2}$	جتا°45= $\frac{\sqrt{2}}{2}$	ظا°45= 1
الزاوية °60 : $\frac{\pi}{3}$:	جا°60 = $\frac{\sqrt{3}}{2}$	جتا°60= $\frac{1}{2}$	ظا°60= $\sqrt{3}$
الزاوية °90 : $\frac{\pi}{2}$:	جا°90 = 1	جتا°90= 0	ظا°90= كمية غير معرفة

لاحظ أن الزاوية θ° بالراديال = $\frac{\pi\,\theta°}{180°}$ أي ان °30 = $\frac{\pi\,30°}{180°}$ = $\frac{\pi}{6}$ كذلك °60 = $\frac{\pi}{3}$ ، °90 = $\frac{\pi}{2}$ وهكذا

مزيد من النسب المثلثية:

قاθ = $\frac{1}{\text{جتا}\theta}$ ، قتا θ = $\frac{1}{\text{جا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{1}{\text{ظا}\theta}$

أشكال آخري لـ ظاθ ، ظتاθ : ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

ثلاث متطابقات هامه:

جا^{2}θ + جتا^{2}θ = 1 ، قا^{2}θ – ظا^{2}θ = 1 ، قتا^{2}θ – ظتا^{2}θ = 1

الدوال الزوجية والدوال الفردية :

جا (- س) = - جا س

جتا (- س) = جتا س

ظا (- س) = - ظا س

الزوايا المركبة :

جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب	،	جا(أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب
جتا(أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب	،	جتا(أ - ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب
ظا(أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ+ظا ب}}{\text{1−ظا أ ظا ب}}$	،	ظا(أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ−ظا ب}}{\text{1+ظا أ ظا ب}}$



تمرين 2-1

(1)أوجد قيم الآتي بدلالة الجذور الصماء باستخدام صيغة الزاوية المركبة

(أ) جا(30 + 45)°

الحل :

جا (30 + 45)° = جا 30°جتا 45° + جتا 30°جا 45°

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(ب) جا (45 - 30)°

الحل :

جا (45 - 30)° = جا 45°جتا 30° - جتا 45°جا 30°

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(جـ) ظا (30 + 45)°

الحل :

ظا (30 + 45)° = $\frac{\text{ظا 30° + ظا 45°}}{\text{1 − ظا 30°ظا 45°}}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - 1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{3-1}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = 2+\sqrt{3}$$

(د) جا105°

الحل :

جا (45 + 60)° = جا 45°جتا 60° + جتا 45°جا 60°

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(هـ) ظا15°

الحل :

ظا (45 - 30)° = $\frac{ظا 45° - ظا 30°}{1 + ظا 45° ظا 30°}$

= $\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$ = $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$ = $\frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{3 - 1}$

= $\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2}$ = $\left(2 - \sqrt{3}\right)$

(و) جتا (- 45)°

الحل :

جتا (0 - 45)° = جتا 0° جتا 45° + جا 0° جا 45°

= 1 × $\frac{\sqrt{2}}{2}$ + 0 × $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)عبر بصورة نسب مثلثيه فريدة:

(أ) جا 15°جتا 24° + جتا 15°جا 24°

الحل :

جا 15°جتا 24° + جتا 15°جا 24° = جا(15° + 24°) = جا 39°

(ب) جتا 50°جتا 20° + جا 50°جا 20°

الحل :

جتا 50°جتا 20° + جا 50°جا 20° = جتا(50° - 20°) = جتا 30°

(جـ) $\frac{1 + ظا 20°}{1 - ظا 20°}$

الحل :

$\frac{ظا 45° + ظا 20°}{1 - ظا 45° ظا 20°}$ = ظا (45 + 20)° = ظا 65°

(3)أوجد، بدون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة كل من:

(أ) جتا 7°جا 23° + جا 7°جتا 23°

الحل :

جتا 7°جا 23° + جا 7°جتا 23° = جا(7° + 23°) = جا 30° = $\frac{1}{2}$

(ب) جتا 75°جتا 45°- جا 75°جا 45°

الحل :

جتا 75°جتا 45°- جا 75°جا 45° = جتا(75° +45°) = جتا 120° = - $\frac{1}{2}$

(جـ) $\frac{\text{ظا } 13° + \text{ظا } 32°}{1 - \text{ظا } 13° \text{ظا } 32°}$

الحل :

$\frac{\text{ظا } 13° + \text{ظا } 32°}{1 - \text{ظا } 13° \text{ظا } 32°}$ = ظا (13 + 32)° = ظا 45° = 1

(4)عبر بصورة نسب مثلثيه فريدة:

(أ) $\frac{1}{2}$ **جتا θ° +** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **جا θ°**

الحل :

جا 30°جتا θ° + جتا 30°جا θ° = جا(30° +θ°)

(ب) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ **جتا θ°** + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **جا θ°**

الحل :

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ جا θ° - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جتا θ°

جتا 45°جا θ° - جا 45°جتا θ° = جا(θ° - 45°)

(جـ) $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \text{ظا } \theta°}{1 - \frac{\text{ظا } \theta°}{\sqrt{3}}}$

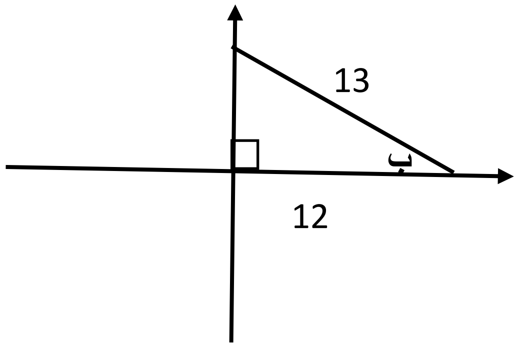
الحل :

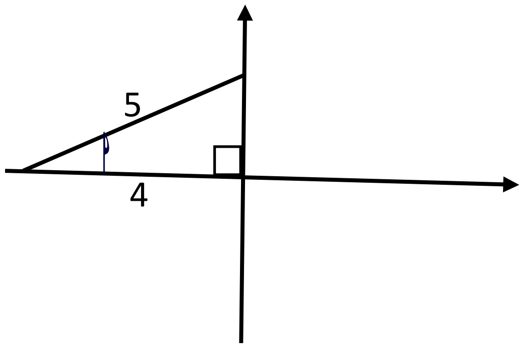
$\frac{\text{ظا } 30° + \text{ظا } \theta°}{1 - \text{ظا } 30° \text{ظا } \theta°}$ = ظا (30 + θ)°

(5) إذا كان جتا أ = - $\frac{4}{5}$ ، جتا ب = $\frac{12}{13}$ ، أ زاوية منفرجة ، ب زاوية حادة، فأوجد، من دون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة كل من:

(أ) جا (أ + ب) (ب) جا (أ - ب) (جـ) ظا (أ + ب)

الحل :





جا أ = $\frac{3}{5}$ ، جتا أ = $\frac{-4}{5}$ ، ظا أ = $\frac{-3}{4}$ ، جاب = $\frac{5}{13}$ ، جتاب = $\frac{12}{13}$ ، ظاب = $\frac{5}{12}$

أ زاوية منفرجة أي تقع في الربع الثاني حيث جا موجبة اما جتا ، ظا سالبتان

(أ) جا (أ + ب)

جا (أ + ب) = جا أ جتاب + جتا أ جاب = $\frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{-4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}$

(ب) جا (أ - ب)

جا (أ - ب) = جا أ جتاب - جتا أ جاب = $\frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{-4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}$

(جـ) ظا (أ + ب)

ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظاب}}{\text{1 − ظا أ ظاب}} = \frac{\frac{-3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{-3}{4} \times \frac{5}{12}} = \frac{\frac{-9+5}{12}}{\frac{5}{16} + \frac{9}{9}} = \frac{-4}{12} \times \frac{16}{21} = \frac{-16}{63}$

(6) إذا كان $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{1 - ظا أ ظا ب}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$، فأوجد، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة أ + ب حيث أ ، ب زاويتان حادتان .

الحل :

∵ ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظاب}}{\text{1 − ظا أ ظاب}}$

∴ ظا (أ + ب) = $\frac{3}{\sqrt{3}}$ ⟸ (أ + ب) = ظا$^{-1}$ $\frac{3}{\sqrt{3}}$ ⟸ أ + ب = 60°

قوانين ضعف ومضاعفات الزوايا :

قوانين ضعف الزاويه

1) جا 2θ = 2جا θ جتا θ

2) جتا 2θ = جتا^2 θ − جا^2 θ
= 2 جتا^2 θ − 1
= 1 −2 جا^2 θ

3) ظا 2θ = $\frac{\text{2ظا } \theta}{\text{1− ظا}^2\ \theta}$

قوانين انصاف الزوايا

4) جا θ = 2جا $\frac{\theta}{2}$ جتا $\frac{\theta}{2}$

5) جتا θ = جتا^2 $\frac{\theta}{2}$ − جا^2 $\frac{\theta}{2}$
= 2 جتا^2 $\frac{\theta}{2}$ −1
= 1 − 2 جا^2 $\frac{\theta}{2}$

6) ظا θ = $\frac{\text{2 ظا } \frac{\theta}{2}}{\text{1− ظا}^2 \frac{\theta}{2}}$

المقدار : "أ جتاس $\pm$ ب جاس "

أ جتاθ + ب جاθ ≡ ر جتا(θ - ∝)

أ جتاθ - ب جاθ ≡ ر جتا(θ + ∝)

أ جاθ + ب جتاθ ≡ ر جا(θ + ∝)

أ جاθ - ب جتاθ ≡ ر جا(θ - ∝)

حيث ر = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ ، ظا ∝ = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

القيمة العظمي = ر ، القيمة الصغري = - ر

حل المعادلة المثلثية:"أ جتاθ + ب جاθ = د" حيث أ ، ب ، د ثوابت

أ جتاθ + ب جاθ = د استخدم أجتاθ + ب جاθ ≡ رجتا(θ - ∝) = د

أ جتاθ - ب جاθ = د استخدم أجتاθ - ب جاθ ≡ رجتا(θ + ∝) = د

أ جاθ + ب جتاθ = د استخدم أجاθ + ب جتاθ ≡ رجا(θ + ∝) = د

أ جاθ - ب جتاθ = د استخدم أجاθ - ب جتاθ ≡ رجا(θ - ∝) = د



تمرين 2-ب

(1) اختصر:

(أ) جتا² 18° - جا² 18°

الحل :

جتا² 18° - جا² 18° = جتا (2 × 18°)

= جتا 36°

(ب) $\frac{1 - \text{ظا}^2 10°}{2\ \text{ظا}\ 10°}$

لاحظ أن إذا كان ظا 2θ = $\frac{2\text{ظا}\theta}{1 - \text{ظا}^2\theta}$

فإن $\frac{1}{\text{ظا}\ 2\theta} = \frac{1 - \text{ظا}^2\theta}{2\text{ظا}\theta}$

الحل :

$\frac{1 - \text{ظا}^2 10°}{2\ \text{ظا}\ 10°} = \frac{1}{\text{ظا}\ (2 \times 10°)} = \frac{1}{\text{ظا}\ 20°}$

= ظتا 20°

(جـ) 2 جا $\frac{س}{2}$ جتا $\frac{س}{2}$

الحل :

2 جا $\frac{س}{2}$ جتا $\frac{س}{2}$ = جا س

(د) 2 جتا² 2 س – 1

الحل :

2 جتا² 2 س – 1 = جتا (2 × 2 س)

= جتا 4 س .

(هـ) جا س جتا س

الحل :

جا س جتا س = $\frac{1}{2}$ × 2 جا س جتا س

= $\frac{1}{2}$ جا 2 س

(2) أوجد من دون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة الآتي:

(أ) 2 جا 75° جتا 75°

الحل:

2 جا 75° جتا 75° = جا (2 × 75°)

= جا 150° = $\frac{1}{2}$

(ب) جتا² $22\frac{1}{2}$° - جا² $22\frac{1}{2}$°

الحل:

جتا² $22\frac{1}{2}$° - جا² $22\frac{1}{2}$° = جتا (2 × $22\frac{1}{2}$°)

= جتا 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(جـ) $\frac{\text{ظا}\ 112\frac{1}{2}°}{1 - \text{ظا}^2\ 112\frac{1}{2}°}$

الحل:

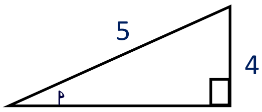
$\frac{1}{2} \times \frac{2\ \text{ظا}\ 112\frac{1}{2}°}{1 - \text{ظا}^2\ 112\frac{1}{2}°}$ = $\frac{1}{2}$ ظا (2 ×$\frac{1}{2}$ 112°) = $\frac{1}{2}$ ظا 225° = $\frac{1}{2}$ × 1 = $\frac{1}{2}$

(3) إذا كان ، جا أ = $\frac{4}{5}$ ، أ زاوية حادة، فأوجد، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة كل من:

(أ) جا 2 أ   (ب) جتا 2 أ   (جـ) ظا 2 أ

الحل:

∵ جا ٲ = $\frac{4}{5}$ ∴ جتا ٲ = $\frac{3}{5}$ ، ظا ٲ = $\frac{4}{3}$ من الرسم



$3 = \sqrt{5^2 - 4^2}$

(أ) جا 2 ٲ	(ب) جتا 2 ٲ	(جـ) ظا 2 ٲ
جا 2أ = 2 جا ٲ جتا ٲ $= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$	جتا 2 ٲ = 1 − 2 جا² ٲ $= 1 - 2 \times (\frac{4}{5})^2$ $= 1 - \frac{32}{25} = \frac{-7}{25}$	ظا 2ٲ = $\frac{2 \text{ ظا ٲ}}{1 - \text{ظا}^2 \text{ ٲ}}$ $= \frac{2 \times \frac{4}{3}}{1 - (\frac{4}{3})^2} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}}$ $= \frac{8}{3} \times \frac{-9}{7} = \frac{-24}{7} = -3\frac{3}{7}$

(5) أوجد، قياسات قيم س، حيث 0° ≤ س ≤ 360° ، والتي تحقق المعادلات الآتية:

(ٲ) $\frac{1}{2}$ جا س = جا2 س

الحل :

$\frac{1}{2}$ جا س = جا2 س

$\frac{1}{2}$ جا س = 2 جا س جتا س   بالضرب × 2 وجعل المعادلة صفرية

جا س – 4 جا س جتا س = 0   بأخذ جا س عامل مشترك

جا س (1 – 4 جتا س) = 0

إما جا س = 0 ومنها س = 0° ، س = 180° ، س = 360°

أ، 1 – 4 جتا س = 0 ⟸ جتا س = $\frac{1}{4}$ ومنها س = 75.5° ، س = 284.5°

س = { 0° ، 75.5° ، 180° ، 284.5° ، 360° }

(ب) 7 جا س + 3 جتا 2 س = 0

الحل :

7 جا س + 3 جتا 2 س = 0

7 جا س + 3 (1 – 2 جا^2 س) = 0

7 جا س + 3 – 6 جا^2 س = 0

6 جا^2 س - 7 جا س - 3 = 0

(2 جا س – 3)(3 جا س + 1) = 0

2 جا س – 3 = 0 ⟸ جا س = $\frac{3}{2}$ مرفوضة

3 جا س + 1 = 0 ⟸ جا س = $\frac{-1}{3}$

س = جا$^{-1}$ ($\frac{-1}{3}$) ⟸ س = - 19.5° أي س = 340.5° الربع الرابع

س = 199.5° الربع الثالث

(جـ) ظا 2 س = 3 ظا س

الحل :

ظا 2 س = 3 ظا س

$\frac{2 \text{ ظا س}}{1 - \text{ظا}^2 \text{ س}}$ = 3 ظا س

2 ظا س = 3 ظا س - 3 ظا^3 س

3 ظا^3 س – ظا س = 0

ظا س (3 ظا^2 س – 1) = 0 بأخذ ظا س عامل مشترك

إما ظا س = 0 ومنها س = 0° ، س = 180° ، س = 360°

أ، 3 ظا^2 س – 1 = 0

ومنها ظا س = ± $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⟸ س = 30° ، س = 150° س = 210° ، س = 330°

س = { 0° ، 30° ، 150° ، 180° ، 210° ، 330° ، 360° }

(6) أوجد القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال الآتية :

(أ) 3 جا θ + 4 جتا θ

الحل :

ر = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5 القيمة العظمى = ر القيمة الصغرى = - ر

ر = 5 - ر = -5

(ب) 3 جتا θ - 4 جا θ

الحل :

ر = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5

القيمة العظمى = ر

ر = 5

القيمة الصغرى = - ر

- ر = -5

(جـ) م جا θ - ن جتا θ

الحل :

ر = $\sqrt{م^2 + ن^2}$

القيمة العظمى = ر

ر = $\sqrt{م^2 + ن^2}$

القيمة الصغرى = - ر

- ر = - $\sqrt{م^2 + ن^2}$

تمرين :

اوجد قيمة θ للدالة 3 جا θ + 4 جتا θ عند النهاية العظمي والنهاية الصغرى

الحل :

- 3 جا θ + 4 جتا θ ≡ ر جا (θ + α)

3 جا θ + 4 جتا θ ≡ 5 جا (θ + 53.13°)

عند النهاية العظمى جا (θ + 53.13°) = 1

(θ + 53.13°) = جا$^{-1}$ (1)

(θ + 53.13°) = 90°

θ = 90° - 53.13°

Θ = 36.87°

عند النهاية الصغرى جا (θ + 53.13°) = -1

(θ + 53.13°) = جا$^{-1}$ (-1)

(θ + 53.13°) = 270°

θ = 270° - 53.13°

Θ = 216.87°

تمرين 2-ج

(1) أوجد جميع قيم س بين 360°، 0° التي تحقق المعادلة 5 جا س + 2 قتا س = 11

الحل:

5 جا س $+ \frac{2}{\text{جا س}} = 11$ بتوحيد المقامات للطرف الأيمن

$\frac{5 \text{ جا}^2 \text{س} + 2}{\text{جا س}} = 11$ بضرب طرفي المعادلة × جا س

5 جا^{2}س $+ 2 = 11$ جا س بجعل المعادلة صفرية

5 جا^{2}س $- 11$ جا س $+ 2 = 0$

(جا س – 2)(5 جا س – 1) = 0

إما جا س = 2 وهذا مرفوض

أ، 5 جا س = 1 ⟸ جا س = $\frac{1}{5}$

الربع الأول س = 11.5° ، الربع الثاني س = 168.5°

س = { 11.5° ، 168.5° }

(2) إذا عُلم أن : ظا θ = س ، جتا 2θ = ص ، وأن θ زاوية حادة، فأوجد ص بدلالة س.

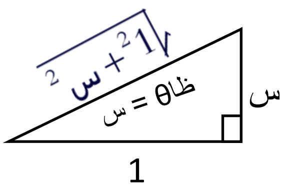
الحل :

جتا 2θ = 2جتا$^2\theta$ - 1

جتا2θ = ص

ص = 2 جتا$^2\theta - 1$

جتا $\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{س}^2}}$



$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+\text{س}^2}}\right)^2 - 1$

$= 2 \times \frac{1}{1+\text{س}^2} - 1 = \frac{2}{1+\text{س}^2} - \frac{1+\text{س}^2}{1+\text{س}^2}$

ص $= \frac{1-\text{س}^2}{1+\text{س}^2}$

(3) إذا كان ظا س = $\frac{15}{8}$ ، جتا ص = $\frac{-3}{5}$ ،حيث س، ص في نفس الربع، فاحسب من دون استخدام الآلة جا (س + ص)

الحل:

س ، ص في نفس الربع ، ظا موجبة ، جتا سالبة ∴ نحن في الربع الثالث

∵ ظا س = $\frac{15}{8}$ ∴ جا س = - $\frac{15}{17}$ جتا س = - $\frac{8}{17}$

∵ جتا ص = - $\frac{3}{5}$ ∴ جا ص = - $\frac{4}{5}$ ظا ص = $\frac{3}{4}$

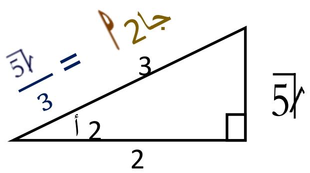
جا (س + ص) = جا س جتا ص + جتا س جا ص

$= \frac{-15}{17} \times \frac{-3}{5} + \frac{-8}{17} \times \frac{-4}{5}$

$= \frac{45}{85} + \frac{32}{85} = \frac{77}{85}$

(4) إذا عُلم 2أ زاوية حادة، أن جا2أ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، فاحسب ، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيم:

(أ) جا أ (ب) ظا أ



الحل :

جا2أ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، جتا2أ = $\frac{2}{3}$ من الشكل المقابل

(أ) جا أ

جا أ = $\sqrt{\frac{1-\text{جتا2أ}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

بالمثل جتا أ = $\sqrt{\frac{1+\text{جتا2أ}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

(ب) ظا أ

ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{30}}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

(6) حل المعادلات الأتية في س حيث $0° \le$ س $\le 360°$

(أ) 3 جتا س + 4 جا س = 5 (ب) 4 جا س - 3 جتا س = 2 (جـ) $\sqrt{3}$ جا س + جتا س = 1

الحل :

(أ) 3 جتا س + 4 جا س = 5

نفرض أن 3 جتا س + 4 جا س ≡ ر جتا (س – α) حيث ر = $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ، α = ظا$^{-1}(\frac{4}{3}) = 53.1°$

3 جتا س + 4 جا س ≡ 5 جتا (س – 53.1°)

5 جتا (س – 53.1°) = 5 ⟸ جتا (س – 53.1°) = 1

س – 53.1° = جتا$^{-1}$ 1 ⟸ س – 53.1° = 0

س = 53.1°

(ب) 4 جا س - 3 جتا س = 2

نفرض أن 4 جا س - 3 جتا س ≡ ر جا (س – α) حيث ر = $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ، α = ظا$^{-1}(\frac{3}{4}) = 36.9°$

4 جا س - 3 جتا س ≡ 5 جا (س – 36.9°)

5 جا (س – 36.9°) = 2 ⟸ جا (س – 36.9°) = $\frac{2}{5}$

س – 36.9° = جا$^{-1}$ $\frac{2}{5}$ ⟸ س – 36.9° = 23.6° **س = 60.48°**

س – 36.9° = 156.4° **س = 193.3°**

س = { 60.48° ، 193.3° }

(جـ) $\sqrt{3}$ جا س + جتا س = 1

نفرض أن $\sqrt{3}$ جا س + جتا س ≡ ر جا (س + α) حيث ر = $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ ، α = ظا$^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°$

$\sqrt{3}$ جا س + جتا س ≡ 2 جا (س + 30°)

2 جا (س + 30°) = 1 ⟸ جا (س + 30°) = $\frac{1}{2}$

س + 30° = جا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ ⟸ س + 30° = 30° **س = 0° ، س = 360°**

س + 30° = 150° **س = 120°**

س = { 0° ، 120° ، 360° }

تمارين في المتطابقات

س1 : عبر بصورة نسب مثلثية وحيدة

(أ) جا 33°جتا 21° - جتا 33°جا 21°

(ب) جتا 55°جتا 40° + جا 55°جا 40°

(جـ) جتا ($20° + \theta$) جتا θ + جا ($20° + \theta$) جا θ

(د) $\frac{\text{ظا } 12° + \text{ظا } 15°}{1 - \text{ظا } 12° \text{ظا } 15°}$

س2 : أوجد من دون أستخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة ، قيمة كل من :

(أ) جا 73°جتا 28° - جتا 73°جا 28°

(ب) جتا 75°جتا 45° - جا 75°جا 45°

(جـ) جا (30° - س) جتا س + جتا (30° - س) جا س

(د) $\frac{\text{ظا } 85° - \text{ظا } 25°}{1 + \text{ظا } 85° \text{ظا } 25°}$

س3 : إذا كان جتا ا = $\frac{3}{5}$ ، ظا ب = $\frac{5}{12}$ ، ا ، ب زاويتان حادتان ، فأوجد ، من دون أستخدام الجداول الرياضية قيمة كل من :

(أ) جا (ا - ب) (ب) جتا (ا + ب) (جـ) ظا (ا - ب)

س4 : إذا كان ظا (ا + ب) = 2 ، ظا ا = $\frac{1}{4}$ ، فأوجد قيمة ظا ب

س5 : إذا كان $\frac{\text{ظا ا} + \text{ظا ب}}{1 - \text{ظا ا ظا ب}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ ، فأوجد من دون أستخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة ا + ب حيث ا ، ب زاويتان حادتان

س6 : حل المعادلات الآتية لقيم س حيث $0° \le$ س $\le 360°$

(أ) جا س = جتا (س + 30°)

(ب) $\frac{1 + \text{ظا س}}{1 - \text{ظا س}} = 2$

س7 : أختصر :

(أ) 2 جا 21° جتا 21°

(ب) 2 جا ($\frac{1+\theta}{2}$) جتا ($\frac{1+\theta}{2}$)

(ب) 25 جتا ^{2} 2° - 1

(جـ) $\frac{2 \text{ ظا } 32°}{1 - \text{ظا}^2 32°}$

س8 : أوجد ، من دون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة ، قيمة الآتي :

(أ) 2 جا 15° جتا 15° (ب) 15 جتا ^{2} 2° - 1 (جـ) $\frac{2 \text{ ظا } 22\frac{1}{2}°}{1 - \text{ظا}^2 22\frac{1}{2}°}$

س9 : إذا كان ظا ؟ = س ، ؟ زاوية حادة ، فأوجد :

(أ) جا ؟ (ب) جتا ؟ (جـ) ظا ؟2

س10 : أوجد القيم العظمى والصغرى لكل من المقادير الآتية ، مع ذكر قيم θ من 0° إلى 360°

(أ) $\sqrt{7}$ جتا θ + 3 جا θ (ب) جا θ - 5 جتا θ (جـ) جتا θ + $\sqrt{3}$ جا θ

(د) جتا (θ + 60°) + جتا θ

س11 : حل المعادلة الآتية في θ حيث 0° ≥ $360° \leq \theta$

(أ) $\sqrt{3}$ جا θ + جتا θ = 1 (ب) 3 جا θ - 4 جتا θ = 5

تفاضل الدوال الغير جبرية

تفاضل الدوال المثلثية

$\frac{د}{دس}$ (جاس) = جتاس

$\frac{د}{دس}$ (جتاس) = - جاس

$\frac{د}{دس}$ (ظاس) = قا^{2}س

$\frac{د}{دس}$ (قاس) = قاس ظاس

$\frac{د}{دس}$ (قتاس) = - قتاس ظتاس

$\frac{د}{دس}$ (ظتاس) = - قتا^{2}س

(-) تفاضل الدالة المثلثية = تفاضل الزاوية × تفاضل النسبة بنفس الزاوية

(-)عند إيجاد مشتقة الدوال المثلثية يجب أن تكون الزوايا بالراديان وذلك بالضرب × $\frac{\pi}{180}$

مشتقات : جا (أ س + ب) ، جتا (أ س + ب) ، ظا (أ س + ب)

$\frac{د}{دس}$ جا (أ س + ب) = أ جتا (أ س + ب)

$\frac{د}{دس}$ جتا (أ س + ب) = - أ جا (أ س + ب)

$\frac{د}{دس}$ ظا (أ س + ب) = أ قا^2 (أ س + ب)

مثال:

فاضل الآتي بالنسبة لـ س

(1) جا 5 س **(2) جتا(1 – س)** **(3) ظا $\frac{1}{2}$ س**

الحل :

(1) $\frac{د}{دس}$ جا 5 س = 5 جتا 5 س

(2) $\frac{د}{دس}$ جتا (1 - س) = - 1 (- جا (1 – س)) = جا (1 – س)

(3) $\frac{د}{دس}$ ظا $\frac{1}{2}$ س = $\frac{1}{2}$ قا^2 $\frac{1}{2}$ س

تمرين 6-ب

(1) فاضل الآتى بالنسبة إلى س:

(أ) جا 3 س　　(ب) 3 جتا 2 س　　(جـ) $\frac{1}{2}$ ظا 4 س

(د) جتا (1 - 2 س)　　(هـ) $\frac{1}{3}$ ظا (6 س + 1)　　(و) 2 جا ($\frac{1}{2}$س - 3)

الحل :

(أ) $\frac{د}{دس}$ جا 3 س = 3 جتا 3 س

(ب) $\frac{د}{دس}$ 3 جتا 2 س = 3 × 2 (- جا 2 س) = - 6 جا 2 س

(جـ) $\frac{د}{دس}$ $\frac{1}{2}$ ظا 4 س = $\frac{1}{2}$ × 4 قا^2 4 س = 2 قا^2 4 س

(د) $\frac{د}{دس}$ جتا (1 - 2 س) = - 2 (- جا (1 - 2 س)) = 2 جا (1 - 2 س)

(هـ) $\frac{د}{دس}$ $\frac{1}{3}$ ظا (6 س + 1) = $\frac{1}{3}$ × 6 قا^2 (6 س + 1) = 2 قا^2 (6 س + 1)

(و) $\frac{د}{دس}$ 2 جا ($\frac{1}{2}$ س – 3) = 2 × $\frac{1}{2}$ (جتا ($\frac{1}{2}$ س – 3)) = جتا ($\frac{1}{2}$ س – 3)

تمرين : فاضل الآتي بالنسبة لـــ س

النسبة	النسبة بالراديان	مشتقة النسبة
(أ) جا سْ	جا $\frac{\pi س}{180}$	$\frac{\pi}{180}$ جتا $\frac{\pi س}{180}$
(ب) جتا سْ	جتا $\frac{\pi س}{180}$	- $\frac{\pi}{180}$ جا $\frac{\pi س}{180}$
(جـ) ظا 2 سْ	ظا $\frac{\pi س}{90}$	$\frac{\pi}{90}$ قا^2 $\frac{\pi س}{90}$

تمرين :

فاضل الآتى بالنسبة إلى س :

(1) جا 6 س　　(2) $\sqrt{1 - جاس}$　　(3) - جا (1 – س)

(4) جتا 5 س　　(5) $\frac{1}{3}$ جتا 3 س　　(6) جتا (1 – س)

(7) ظا 4 س　　　(8) $\frac{1}{4}$ ظا 4 س　　　(9) ظا (2 س – 3)

تفاضل حاصل ضرب دالتين :

تمرين 6-جـ

(1) فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) 2 س جتا س　(ب) 4 س جا $\frac{1}{2}$ س　(جـ) 2 س جتا (1 - س)　(د) س ظا (2 س + 1)

(هـ) $\frac{1}{2}$ جتا س ظا س　(و) جا 3 س ظا 4 س　(ز) $\frac{\text{جتا س}}{\text{2 س}}$　(ح) $\frac{\text{جا 2 س}}{\text{1 + س}}$

(ط) $\frac{\text{س}}{\text{ظا س}}$　(ي) قتا 3 س (إرشاد قتا س = $\frac{1}{\text{جا س}}$)　(ك) ظتا 2 س (إرشاد ظتا س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$)

الحل :

(أ) $\frac{ى}{ى س}$ 2 س جتا س = - 2 س جا س + 2 جتا س = 2 جتا س – 2 س جا س

(ب) $\frac{ى}{ى س}$ 4 س جا $\frac{1}{2}$ س = 4 س × $\frac{1}{2}$ جتا $\frac{1}{2}$ س + جا $\frac{1}{2}$ س × 4 = 4 جا $\frac{1}{2}$ س + 2 س جتا $\frac{1}{2}$ س

(جـ) $\frac{ى}{ى س}$ 2 س جتا (1 - س) = 2 س× - (- جا (1 - س)) + جتا (1 - س)×2

= 2 جتا (1 – س) + 2 س جا (1 – س)

(د) $\frac{ى}{ى س}$ س ظا (2 س + 1) = س × 2 قا^2 (2 س + 1) + **ظا** (2 س + 1) × 1

= ظا (2 س + 1) + 2 س قا^2(2 س + 1)

(هـ) $\frac{ى}{ى س}$ $\frac{1}{2}$ جتا س ظا س = $\frac{ى}{ى س}$ $\frac{1}{2}$ جتا س × $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = $\frac{ى}{ى س}$ $\frac{1}{2}$ جا س

= $\frac{1}{2}$ جتا س

(و) $\frac{ى}{ى س}$ جا 3 س ظا 4 س = جا 3 س × 4 قا^2 4 س + ظا 4 س × 3 جتا 3 س

= 3 جتا 3 س ظا 4 س + 4 جا 3 س قا^2 4 س

(ز) $\frac{ى}{ى س}$ $\frac{\text{جتا س}}{\text{2 س}}$ = $\frac{\text{2 س(– جا س) –جتا س × 2}}{\text{(2 س)}^2}$ = $\frac{\text{–2 (س جا س + جتا س)}}{\text{4 س}^2}$ = $\frac{\text{– (س جا س + جتا س)}}{\text{2 س}^2}$

(ح) $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} = \frac{\text{جا } 2 \text{ س}}{\text{س} + 1} = \frac{2(1+\text{س})\,\text{جتا}2\text{ س} - \text{جا } 2 \text{ س}}{(1+\text{س})^2} = \frac{2 \text{ جتا } 2 \text{ س}}{1+\text{س}} - \frac{\text{جا } 2 \text{ س}}{(1+\text{س})^2}$

(ط) $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} = \frac{\text{س}}{\text{ظا س}} = \frac{\text{ظا س} - \text{س قا}^2\text{ س}}{(\text{ظا س})^2} = \frac{\text{ظا س}}{\text{ظا}^2\text{ س}} - \frac{\text{س قا}^2\text{ س}}{\text{ظا}^2\text{ س}} = \frac{1}{\text{ظا س}} - \frac{\text{س}}{\text{جا}^2\text{ س}}$

$\frac{\text{س قا}^2\text{ س}}{(\text{ظا س})^2} = \text{س} \times \frac{\frac{1}{\text{جتا}^2\text{ س}}}{\frac{\text{جا}^2\text{ س}}{\text{جتا}^2\text{ س}}}$

$= \text{س} \times \frac{1}{\text{جتا}^2\text{ س}} \times \frac{\text{جتا}^2\text{ س}}{\text{جا}^2\text{ س}} = \frac{\text{س}}{\text{جا}^2\text{ س}}$

(ي) $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ قتا 3 س = - 3 قتا 3 س ظتا 3 س

(ك) $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ ظتا 2 س = - 2 قتا^2 2 س

تمرين :

فاضل الآتى بالنسبة إلى س :

(1) س جا 4 س **(2)** 3 س جا $\frac{1}{3}$ س **(3)** $\frac{\text{2 جا س}}{\text{س}}$

(4) س جتا 5 س **(5)** 4 س جتا (1 – س) **(6)** $\frac{\text{3 س}}{\text{جتا س}}$

(7) س ظا 4 س **(8)** 4 س ظا $\frac{1}{4}$ س **(9)** $\frac{\text{س}}{\text{ظا س}}$

مشتقات : $جا^{ن}$ س ، $جتا^{ن}$ س ، $ظا^{ن}$ س

$\frac{ى}{ى س}$ $جا^{ن}$ س = ن $جا^{ن-1}$ س جتا س

$\frac{ى}{ى س}$ $جتا^{ن}$ س = - ن $جتا^{ن-1}$ س جا س

$\frac{ى}{ى س}$ $ظا^{ن}$ س = ن $ظا^{ن-1}$ س $قا^{2}$ س

لاحظ أن ($جا^{ن}$ س) = $(جا س)^{ن}$ وكذلك باقى النسب المثلثية لأي اس

مثال (1) :

اوجد $\frac{ى}{ى س}$ $جا^{3}$ س = 3 $جا^{2}$ س × جتا س = 3 $جا^{2}$ س جتا س

مثال (2) :

اوجد $\frac{ى}{ى س}$ $جتا^{4}$ س = 4 $جتا^{3}$ س × - جاس = - 4 $جتا^{3}$ س جاس

مثال (3) :

اوجد $\frac{ى}{ى س}$ $ظا^{5}$ س = 5 $ظا^{4}$ س × $قا^{2}$ س × 1 = 5 $ظا^{4}$ س $قا^{2}$ س

تمرين 6-د

(1) فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) س - $جتا^{3}$ س (ب) س $جا^{2}$ س (جـ) 3 $ظا^{2}$ $\frac{1}{6}$س

(د) 2 $قتا^{3}$ س (إرشاد: قتا س = $\frac{1}{جاس}$) (هـ) جا س - $جتا^{2}$ س

(2) إذا كان ص = $جا^{3}$ س، فأوجد $\frac{ى ص}{ى س}$ عندما س = π

(3) إذا كان ص $جتا^{2}$ س = 1، فأوجد $\frac{ى ص}{ى س}$، $\frac{ى^{2} ص}{ى س^{2}}$ بدلالة س، ص.

(4) إذا كان س = قا ص، فأوجد $\frac{ى ص}{ى س}$ بدلالة س.

(5) إذا كان جتا 2ص - $جا^{2}$ س = 0، فبين أن: $\frac{ى ص}{ى س}$ = - $\frac{جا 2س}{2جا 2ص}$

(6) إذا كان ص = $قا^{2}$ س ، فأوجد $\frac{ى ص}{ى س}$.

الحل :

(1) (أ) $\frac{ء}{ءس}$ (س - جتا^{3}س) = 1 – 3 جتا^{2}س × (- جاس) × 1 = 1 + 3 جتا^{2}س جاس

(ب) $\frac{ء}{ءس}$ (س جا^{2}س) = س× 2 جا س جتا س + جا^{2}س × 1 = جا س (جا س+2س جتا س)

(جـ) $\frac{ء}{ءس}$ 3 ظا^2 $\frac{1}{6}$ س = 3 × 2 ظا $\frac{1}{6}$ س قا^2 $\frac{1}{6}$ س × $\frac{1}{6}$ = ظا $\frac{1}{6}$ س قا^2 $\frac{1}{6}$ س

(د) $\frac{ء}{ءس}$ 2 قتا^{3}س = 2 × 3 قتا^{2}س × (- قتا س ظتا س) = - 6 $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^4\text{س}}$

(هـ) $\frac{ء}{ءس}$ (جا س - جتا^{2}س) = جتا س – 2 جتا س × - جا س = جتا س (1 + 2 جا س)

(2) إذا كان ص = جا^{3}س ، فاوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = π

الحل :

$\frac{ءص}{ءس}$ = 3 جا^{2}س جتا س

$\frac{ءص}{ءس}$ = 3 جا^2 π جتا 0 = π

(3) إذا كان ص^2 جتا س = 1 فاوجد $\frac{ءص}{ءس}$ ، $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ ، بدلالة س ، ص

الحل :

ص^2 × (- جا س) + جتا س × 2 ص × $\frac{ءص}{ءس}$ = 0

2 ص جتا س $\frac{ءص}{ءس}$ = ص^2 جا س

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{ص}^2 \text{ جا س}}{\text{2 ص جتا س}}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{1}{2}$ ص ظا س

$\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = $\frac{1}{2}$ ص × قا^{2}س + $\frac{1}{2}$ ظا س × $\frac{ءص}{ءس}$

$\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = $\frac{1}{2}$ ص × قا^{2}س + $\frac{1}{2}$ ظا س × $\frac{1}{2}$ ص ظا س

$\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = $\frac{1}{4}$ ص (2 قا^{2}س + ظا^{2}س)

$\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = $\frac{1}{4}$ ص (2 (1 + ظا^{2}س) + ظا^{2}س)

$\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = $\frac{1}{4}$ ص (2 + 3 ظا^{2}س)

(4) إذا كان س = قا ص فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ بدلالة س

الحل :

1 = قا ص ظا ص × $\frac{ءص}{ءس}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{\text{قا ص ظا ص}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{س\sqrt{س^2 - 1}}$

ظا^2 ص = قا^2 ص – 1 ولكن قا^2 ص = س^2

ظا^2 ص = س^2 – 1

ظا ص = $\sqrt{س^2 - 1}$

(5) إذا كان جتا 2 ص – جا س^2 = 0 ، فبين أن : $\frac{ءص}{ءس} = - \frac{\text{جا 2 س}}{\text{2 جا 2 ص}}$

الحل :

- 2 جا 2 ص × $\frac{ءص}{ءس}$ – 2 جا س جتا س = 0

- 2 جا 2 ص $\frac{ءص}{ءس}$ = 2 جا س جتا س

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{جا 2 س}}{\text{–2 جا 2 ص}}$

$\frac{ءص}{ءس} = - \frac{\text{جا 2 س}}{\text{2 جا 2 ص}}$

(6) إذا كان ص = قا س^2 ، فاوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل :

$\frac{ءص}{ءس}$ = 2 قا س قا س ظا س

$\frac{ءص}{ءس}$ = 2 قا س^2 ظا س

تمرين :

(1) إذا كان ص = قا س أثبت أن $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = 2 ص^3 - ص

(2) إذا كان س = ص قا س أثبت أن $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ + ص + 2 جا س = 0

(3) إذا كان ص = س جا س أثبت أن $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ + ص - 2 جتا س = 0

(4) أثبت أن $\frac{ء}{ءس}$ (جا^2 $\frac{س}{2}$ - جتا^2 $\frac{س}{2}$) = جا س

الدوال اللوغاريتمية

حيث أن الدالة الآسية ص = م$^{\text{س}}$ ، س $\in$ ح هي دالة أحادية فوقية لذلك لها دالة عكسية تسمي بالدالة اللوغاريتمية

تعريف :-

الدالة اللوغاريتمية للدالة ص = م$^{\text{س}}$ ، ا > 0 ، ا $\neq 0$ تكتب علي الصورة س = لو$_{\text{م}}$ ص وتسمي لوغاريتمية ص للأساس م ونطاقها س > 0 والدالة اللوغاريتمية للأساس م هي علي الصورة:

$$\text{لو}_{\text{م}} = \{(\text{س} ، \text{ص}) : \text{س} = \text{م}^{\text{ص}} ، \text{ص} \in \text{ح}\}$$

خواص اللوغاريتميات :-

1. **لو$_{\text{م}}$ س ص = لو$_{\text{م}}$ س + لو$_{\text{م}}$ ص**

مثل : لو (2 × 3) = لو 2 + لو 3

2. **لو$_{\text{م}}$ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لو$_{\text{م}}$ س − لو$_{\text{م}}$ ص**

مثل : لو $\frac{2}{3}$ = لو 2 − لو 3

3. **لو س$^{\text{ن}}$ = ن لو س**

مثل : لو 2^{3} = 3 لو 2 ، 4 لو 5 = لو 5^{4}

4. **لو$_{\text{س}}$ س$^{\text{ن}}$ = ن**

مثل : لو$_{2}$ 8 = لو$_{2}$ 2^{3} = 3

5. **لو$_{\text{م}}$ ب = $\frac{\text{لو ب}}{\text{لو م}}$**

مثل : لو$_{2}$ 8 = $\frac{\text{لو}8}{\text{لو}2}$ = $\frac{\text{لو}2^{3}}{\text{لو}2}$ = $\frac{3\ \text{لو}2}{\text{لو} 2}$ = 3

6. لو$_{\text{م}}$ **1 = 0** ، ا $>$ **0** ، ا $\neq$ **1**

مثل : لو$_{5}$ 1 = 0

7. **إذا لم يذكر أساس اللوغاريتم يعتبر الأساس دائما هو 10**

مثل : لو 100 = لو 10^{2} = 2

لو 10000 = لو 10^{4} = 4

لاحظ ان :

لو هـ$^{\text{د}(\text{س})}$ = د (س)

هـ$^{\text{لو د}(\text{س})}$ = د (س)

،

هـ ≈ 2.718

تفاضل الدوال اللوغاريتمية والأسية

اولاً : تفاضل الدوال اللوغاريتمية :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\ \text{لو}\,\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}$$

أ،

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\ \text{لو}(\text{أ س} + \text{ب}) = \frac{\text{أ}}{\text{أ س} + \text{ب}}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\ \text{لو}\,\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{تفاضل ما أمام اللوغاريتم}}{\text{ما أمام اللوغاريتم}}$$

مثال (1) :

أوجد تفاضل ص = لو (س – 3) بالنسبة لـــ س

الحل :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{1}{\text{س} - 3}$$

مثال (2) :

أوجد تفاضل ص = لو جتاس بالنسبة لـــ س

الحل :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{-\text{جا س}}{\text{جتا س}} = -\ \text{ظا س}$$

مثال (3) :

أوجد تفاضل ص = لو $\frac{\text{س} + 1}{2\text{س} - 1}$ بالنسبة لـــ س

الحل :

ص = لو (س + 1) – لو (2 س – 1)

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{1}{\text{س} + 1} - \frac{2}{2\text{س} - 1}$$

مثال (4) :

أوجد تفاضل ص = لو $(1 + \text{س}^2)^5$ بالنسبة لـــ س

الحل :

ص = 5 لو $(1 + \text{س}^2)$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{5 \times 2\text{س}}{1 + \text{س}^2} = \frac{10\text{س}}{1 + \text{س}^2}$$

(2) فاضل الدوال الآتية بالنسبة إلى س:

(أ) لو 3 س　　(ب) لو $(2 - س)$　　(جـ) لو $(1 - س + س^{2})$

(د) لو $\frac{1}{س}$　　(هـ) لو $\sqrt{(1 - س)}$　　(و) لو $\frac{(س - 1)}{(س + 1)}$

الحل :

(أ) $\frac{ء}{ءس}$ لو 3 س $= \frac{3}{3س} = \frac{1}{س}$

(ب) $\frac{ء}{ءس}$ لو $(2 - س) = \frac{1-}{س - 2}$

(جـ) $\frac{ء}{ءس}$ لو $(1 - س + س^{2}) = \frac{2س+1}{1 - س + س^{2}}$

(د) $\frac{ء}{ءس}$ لو $\frac{1}{س} = \frac{ء}{ءس}$ (لو 1 – لو س)

$= 0 - \frac{1}{س}$

(هـ) $\frac{ء}{ءس}$ لو $\sqrt{1 - س} = \frac{ء}{ءس}$ ($\frac{1}{2}$ لو $(1 - س)$)

$= \frac{1}{2 (1 - س)}$

(و) $\frac{ء}{ءس}$ لو $\left(\frac{1 - س}{1 + س}\right) = \frac{ء}{ءس}$ (لو $(1 - س)$ – لو $(1 + س)$)

$= \frac{1-}{1 - س} - \frac{1}{1 + س} = \frac{-(1+س) - (1-س)}{(1+س)(1-س)} = \frac{-1- س- 1 + س}{(1+س)(1-س)}$

$= \frac{2-}{(1+س)(1-س)}$

(3) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي:

(أ) ص = لو $\frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 + 1}$ (ب) ص = لو $(1 - \text{س})^3$

(جـ) ص = لو جا س (د) ص = لو ظا س

(هـ) ص = لو جا (س + 1) (و) ص = لو $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$

(ز) ص = لو $\left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا 2س}}\right)$ (ح) ص = لو_3 جا^3 س

الحل :

(أ) ص = لو س^2 – لو ($\text{س}^2 + 1$)

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{2 س}}{\text{س}^2} - \frac{\text{2 س}}{\text{س}^2 + 1}$

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{2}{\text{س}} - \frac{\text{2 س}}{\text{س}^2 + 1}$

(ب) ص = لو($1 - \text{س}$)^3

ص = 3 لو(1 – س)

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{-3}{1 - \text{س}}$

(جـ) ص = لو جا س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} =$ ظتا س

(د) ص = لو ظا س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا س}}$

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{قا}^2$ س ظتا س

(هـ) ص = لو جا(س + 1)

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{جتا (س + 1)}}{\text{جا (س + 1)}}$

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} =$ ظتا (س + 1)

(و) ص = لو $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$

ص = $\frac{1}{2}$ لو ($\text{س}^2 + 1$)

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$

(ز) ص = لو ($\frac{\text{جا س}}{\text{جتا 2 س}}$)

ص = لو جا س – لو جتا 2 س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} - \frac{\text{–2 جا 2 س}}{\text{جتا 2 س}}$

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} =$ ظتا س + 2 ظا 2 س

(ح) ص = لو_3 جا س^3

ص = 3 لو_3 جا س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = 3 \, \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ لو_3 هـ

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = 3$ ظتا س لو_3 هـ

(4) أوجد دَ (س) في الحالات الآتية:

(أ) د (س) = س لو 2 س

(ب) د (س) = (2 س -1) لو (1 -س)

(جـ) د (س) = (1 + 3 س) لو جا س

(د) د (س) = $\frac{1}{س}$ لو س

الحل :

(أ) د(س) = س لو 2 س

د´ (س) = س × $\frac{2}{2 س}$ + لو 2 س

د´ (س) = 1 + لو 2 س

(ب) د (س) = (2 س – 1) لو (1 – س)

د´ (س) = (2 س – 1) × $\frac{-1}{(1 - س)}$ + 2 لو (1 – س)

د´ (س) = $\frac{1 - 2 س}{(1 - س)}$ + 2 لو (1 – س)

(جـ) د (س) = (1 + 3 س) لو جا س

د´ (س) = (1 + 3 س) × $\frac{جتا س}{جا س}$ + 3 لو جا س

د´ (س) = (1 + 3 س) ظتا س + 3 لو جا س

(د) د(س) = $\frac{1}{س}$ لو س

د´ (س) = $\frac{-1}{س^2}$ لو س + $\frac{1}{س}$ × $\frac{1}{س}$

د´ (س) = $\frac{-1}{س^2}$ لو س + $\frac{1}{س^2}$

د´ (س) = $\frac{1}{س^2}$ (1 - لو س)

تمرين :

(1) إذا كان ص = (س + 2) لو (س + 2) فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(2) إذا كان د (س) = (1 – س) لو(1 - جا س) أوجد د´ (س)

(3) إذا كان د (س) = لو($\frac{جا س}{1 - جتا س}$) أوجد د´ (س)

(4) إذا كان س ص = لو س فأوجد قيمة س عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = 0

ثانياً : تفاضل الدوال الأسية :

$$\frac{ء}{ء س} هـ^{د(س)} = د'(س) \, هـ^{د(س)}$$

، أ

$$\frac{ء}{ء س} هـ^{أ س + ب} = أ \, هـ^{أ س + ب}$$

مثال (1) :

فاضل الآتي بالنسبة إلى س :

(أ) $هـ^{2 س}$ (ب) $هـ^{3 س - 1}$ (جـ) $هـ^{1 - 4 س}$ (د) $(هـ^{س} + \frac{1}{هـ^{س}})^2$

الحل:

(أ) $\frac{ء}{ء س} هـ^{2 س} = 2 \, هـ^{2 س}$

(ب) $\frac{ء}{ء س} هـ^{3 س - 1} = 3 \, هـ^{3 س - 1}$

(جـ) $\frac{ء}{ء س} هـ^{1 - 4 س} = - 4 \, هـ^{1 - 4 س}$

(د) $\frac{ء}{ء س} (هـ^{س} + \frac{1}{هـ^{س}})^2 = \frac{ء}{ء س} (هـ^{2 س} + 2 + هـ^{-2 س}) = 2 \, هـ^{2 س} - 2 \, هـ^{-2 س}$

مثال (2) :

إذا كان ص = $هـ^{س}$ جا 2 س أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

الحل :

$\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{س} \times 2$ جتا 2 س + $هـ^{س}$ جا 2 س = $هـ^{س}$ (2 جتا 2 س + جا 2 س)

مثال (3) :

إذا كان ص = $\frac{جتا 6 س}{هـ^{3 س}}$ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

الحل :

ص = جتا 6 س $هـ^{-3 س}$

$\frac{ء ص}{ء س}$ = جتا 6 س × - 3 $هـ^{-3 س}$ + $هـ^{-3 س}$ × - 6 جا 6 س

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{- 3 \text{ جتا } 6 س}{هـ^{3 س}} + \frac{- 6 \text{ جا } 6 س}{هـ^{3 س}}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{- 3}{هـ^{3 س}}$ (جتا 6 س + 2 جا 6 س)

تمرين 7 -ب

(1) فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) 4 $هـ^{س}$ (ب) $هـ^{3س}$

(جـ) $هـ^{-2س}$ (د) $هـ^{س}$

(هـ) $هـ^{2س} - \frac{1}{هـ^{س}}$ (و) $(هـ^{س} - \frac{1}{هـ^{س}})^2$

الحل:

(أ) $\frac{ء}{ءس} 4 هـ^{س} = 4 هـ^{س}$

(ب) $\frac{ء}{ءس} هـ^{3س} = 3 هـ^{3س}$

(جـ) $\frac{ء}{ءس} هـ^{-2س} = -2 هـ^{-2س}$

(د) $\frac{ء}{ءس} هـ^{س} = هـ^{س}$

(هـ) $\frac{ء}{ءس} (هـ^{2س} - \frac{1}{هـ^{س}}) = \frac{ء}{ءس} (هـ^{2س} - هـ^{-س})$

$= 2 هـ^{2س} + هـ^{-س}$

(و) $\frac{ء}{ءس} (هـ^{س} - \frac{1}{هـ^{س}})^2 = \frac{ء}{ءس} (هـ^{2س} - 2 + هـ^{-2س})$

$= 2 هـ^{2س} - 2 هـ^{-2س}$

(2) أوجد د/ (س) فيما يلي:

(أ) د (س) = 2 س $هـ^{س + 1}$ (ب) د (س) = (س^2 + 1) $هـ^{س - 1}$

(جـ) د (س) = هـ^{س} ظا س (د) د (س) = لو$_2$ ظا 3 س

الحل :

(أ) د(س) = 2 س $هـ^{س + 1}$

د$^/$(س) = 2 س × $هـ^{س + 1}$ + $هـ^{س + 1}$ × 2

د$^/$(س) = 2 $هـ^{س + 1}$ (س + 1)

(ب) د (س) = (س^2 + 1) $هـ^{س - 1}$

د$^/$(س) = (س^2 + 1) × $هـ^{س - 1}$ + $هـ^{س - 1}$ × 2 س

د$^/$(س) = $هـ^{س - 1}$ (س^2 + 1 + 2 س)

د$^/$(س) = $هـ^{س - 1}$ (س + 1)^2

(جـ) د (س) = هـ^{س} ظا س

د$^/$(س) = هـ^{س} × قا^2 س + ظا س × هـ^{س}

د$^/$(س) = هـ^{س} (قا^2 س + ظا س)

(د) د(س) = لو$_2$ ظا 3 س

د$^/$(س) = $\frac{3 \text{ قا}^2 3 \text{ س}}{\text{ظا } 3 \text{ س}}$ × لو$_2$ هـ

د$^/$(س) = 3 قا^2 3 س ظتا 3 س لو$_2$ هـ

د$^/$(س) = 3 قا 3 س قتا 3 س لو$_2$ هـ

(3) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

(أ) ص = $\frac{هـ^{3س}}{س}$ (ب) ص = $\frac{هـ^{2س} + هـ^{-2س}}{هـ^{-س}}$

(جـ) ص = $هـ^{2س+1}$ لو (س + 1)

(أ) ص = $\frac{هـ^{3س}}{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{3س هـ^{3س} - هـ^{3س}}{س^2}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{هـ^{3س}}{س^2}$ (3 س – 1)

(ب) ص = $\frac{هـ^{2س} + هـ^{-2س}}{هـ^{-س}}$

ص = $هـ^{3س} + هـ^{-س}$

$\frac{ءص}{ءس} = 3هـ^{3س} - هـ^{-س}$

(جـ) ص = $هـ^{2س+1}$ لو (س + 1)

$\frac{ءص}{ءس} = هـ^{2س+1} \times \frac{1}{(س+1)} + 2 هـ^{2س+1}$ لو (س + 1)

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{هـ^{2س+1}}{(س+1)}$ [1 + 2(س + 1) لو (س + 1)]

(4) إذا كان ص = ن $هـ^{-ك س}$ حيث ن ، ك ثابتان، أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ + ك ص = 0.

(5) إذا كان ص = $س^ن هـ^{أس}$، فاثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ – أ ص = $\frac{ن ص}{س}$ حيث ن ، أ ثابتان

(6) إذا كان ص = $هـ^س + هـ^{-س}$، أثبت أن $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ – ص = 0.

(4) ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = - ك ن $هـ^{-ك س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ + ك ص = - ك ن $هـ^{-ك س}$ + ك ن $هـ^{-ك س}$

= 0

(5) $\frac{ءص}{ءس}$ = أ $س^ن هـ^{أس}$ + ن $س^{ن-1} هـ^{أس}$

$\frac{ءص}{ءس}$ – أ ص = $\frac{ن س^ن هـ^{أس}}{س}$ + أ $س^ن هـ^{أس}$ - أ $س^ن هـ^{أس}$

= $\frac{ن ص}{س}$

(6) $\frac{ءص}{ءس} = هـ^س - هـ^{-س}$ ، $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = هـ^س + هـ^{-س}$

$\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ – ص = ($هـ^س + هـ^{-س}$) – ($هـ^س + هـ^{-س}$) = 0

تمرين :

(1) إذا كان ص = $\text{هـ}^{2\text{س}} - \text{هـ}^{-3\text{س}}$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(2) إذا كان ص = $\text{هـ}^{2\text{س}} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-3\text{س}})$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(3) إذا كان ص = $\frac{\text{هـ}^{3\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{هـ}^{-2\text{س}}}$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(4) إذا كان ص = $\frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{س}}$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(5) إذا كان د (س) = $\text{هـ}^{\text{س}}$ ظا س فأوجد د$'$(س)

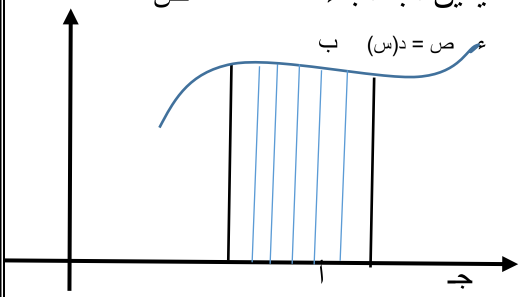
(6) إذا كان د (س) = $\text{هـ}^{1-3\text{س}}$ لو س^{2} فأوجد د$'$(س)

(7) إذا كان د (س) = $\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{س}}$ جتا 3 س فأوجد د$'$(س)

(8) إذا كان ص = $\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{-2\text{س}}$ أوجد القيمة الصغرى للدالة ص

التكامل

هو إيجاد المساحة المحصورة بين المنحني ص= د(س) ومحور السينات والمستقيمين أب ،جـ ء حيث يتم تقسيم المساحة الى مستطيلات صغيرة



ويرمز لعملية التكامل بالرمز $\int$

وعملية التكامل هي إيجاد الدالة الأصلية التي علم إيجاد مشتقتها تحت شروط خاصة .

"حيث التكامل عملية عكسية للتفاضل "

بعض قوانين التكامل:

(1) $\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{ن}+1}\ \text{س}^{\text{ن}+1} + \text{ث}$ حيث $\text{ن} \neq -1$

مثال (1):-

-1 $\int \text{س}^{3}\ \text{ءس} = \frac{1}{4}\ \text{س}^{4} + \text{ث}$

-2 $\int \text{س}^{-5}\ \text{ءس} = -\frac{1}{4}\ \text{س}^{-4} + \text{ث}$

-3 $\int \frac{\text{س}^{2}-4}{\text{س}+2}\ \text{ءس} = \int (\text{س} - 2)\ \text{ءس} = \frac{1}{2}\ \text{س}^{2} - 2\text{س} + \text{ث}$

-4 $\int \text{س}(\text{س}+3)\ \text{ءس} = \int (\text{س}^{2} + 3\text{س})\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{3}}{3} + \frac{3}{2}\ \text{س}^{2} + \text{ث}$

(2) $\int \text{أ}\ .\ \text{ءس} = \text{أ}\ \text{س} + \text{ث}$

مثال(2) :-

-1 $\int 5\ .\ \text{ءس} = 5\text{س} + \text{ث}$

-2 $\int -2\ .\ \text{ءس} = -2\text{س} + \text{ث}$

$$(3)\quad \int (أس + ب)^{ن}\, ءس = \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{أ\times(ن+1)} + ث$$

مثال(3):-

-1 $\int (3س + 4)^{4}\, ءس = \frac{(3س+4)^{5}}{3\times5} + ث$

-2 $\int (4 - 5س)^{3}\, ءس = \frac{(4-5س)^{4}}{-5\times4} + ث$

-3 $\int (2س + 1)^{\frac{1}{2}}\, ءس = \frac{(2س+1)^{\frac{3}{2}}}{2\times\frac{3}{2}} + ث$

$= \frac{(2س+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + ث$

تمارين:-

اوجد التكاملات الآتية :

أ) $\int (3س + 4)\, ءس$ ب) $\int (4 - 5س)^{3}\, ءس$ ج) $\int (2س + 1)^{-\frac{1}{2}}\, ءس$

$$(4)\quad \int_{أ}^{ب} د'(س)\,.\, ءس = د(س)\Big|_{أ}^{ب}$$

$$= [\, د(ب) - د(أ)\,]$$

مثال(4):-

-1 $\int_{1}^{2} س^{2}\, ءس = \Big|\frac{س^{3}}{3}\Big|_{1}^{2} = \Big|\frac{2^{3}}{3} - \frac{1^{3}}{3}\Big| = \Big|\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\Big| = \frac{7}{3}$

-2 $\int_{1}^{3} س^{3}\, ءس = \Big|\frac{س^{4}}{4}\Big|_{1}^{3} = \Big|\frac{3^{4}}{4} - \frac{1^{4}}{4}\Big| = \Big|\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\Big| = \Big|\frac{80}{4}\Big| = 20$

خصائص اساسيه في التكامل:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} = 0$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} = - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\ .\text{د}(\text{س})\ \text{ءس} = \text{ك}.\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}_1(\text{س}) \pm \text{د}_2(\text{س})]\ \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_1(\text{س})\ \text{ءس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_2(\text{س})\ \text{ءس}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس}$$

مثال(5):- إذا كان $\int_{0}^{3} [\text{د}(\text{س}) + 1]\ \text{ءس} = 11$ فأوجد $\int_{3}^{0} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس}$

الحل : $\int_{0}^{3} [\text{د}(\text{س}) + 1]\ \text{ءس} = 11$

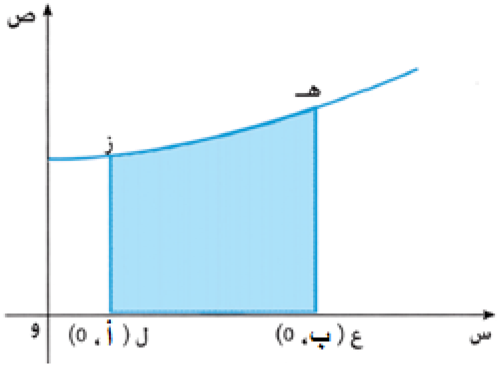
من خواص التكامل $\int_{0}^{3} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} + \int_{0}^{3} \text{ءس} = 11$

$$\int_{0}^{3} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} + \text{س}\ \Big|_{0}^{3} = 11$$

$$\int_{0}^{3} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} + 3 = 11$$

$\int_{0}^{3} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} = 8$ ومن خواص التكامل $\int_{3}^{0} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} = -8$

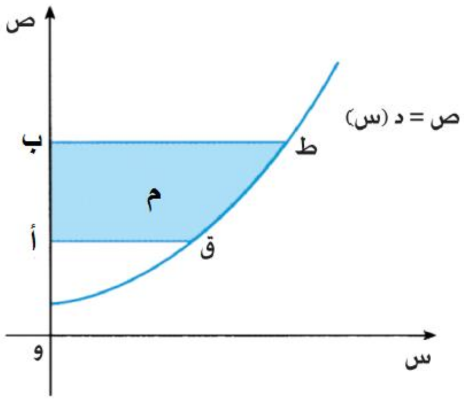
أيجاد المساحة المحصورة بين منحنى ومحور السينات :-



م = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

أيجاد المساحة المحصورة بين منحنى ومحور الصادات :-

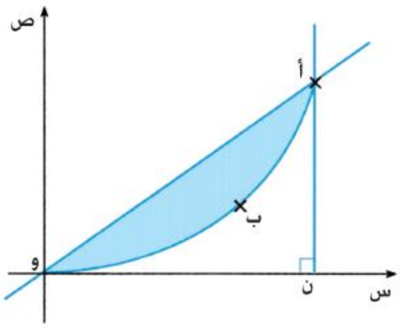
م = $\int_{أ}^{ب}$ س ءص



أيجاد المساحة المحصورة بين منحنين:-

مساحة المنطقة المظللة في الشكل المقابل

مساحة المنطقة = مساحة المنطقة و ا ن – مساحة المنطقة و ب أ ن



مثال 1:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى

ص = س (س ـ 1)(س + 3) ومحور س.

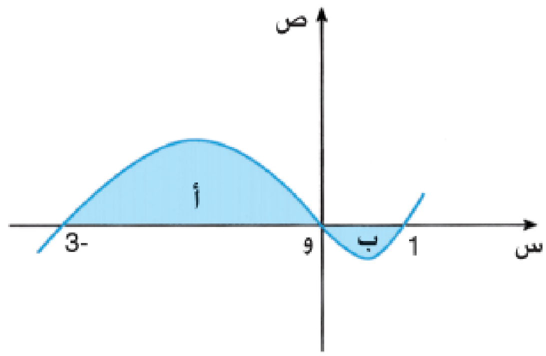
الحل

المنطقة المطلوبة هي المنطقة المظللة في شكل 5 ـ 6

ص = س (س ـ 1)(س + 3)

= س ($س^2$ + 2س ـ 3)

= $س^3$ + 2$س^2$ ـ 3س



المنحنى يقطع محور س عند نقطة الأصل. إذن نوجد المساحتان أ، ب كل على حدة

$$أ = \int_{-3}^{0} ص \, ءس = \int_{-3}^{0} (س^3 + 2س^2 - 3س) \, ءس$$

$$= \left[\frac{س^4}{4} + \frac{2س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} \right]_{-3}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{81}{4} - 18 - \frac{27}{2} \right)$$

$$= 11 \frac{1}{4} \text{ وحدة مربعة}$$

$$ب = \int_{0}^{1} ص \, ءس = \int_{0}^{1} (س^3 + 2س^2 - 3س) \, ءس$$

$$= \left[\frac{س^4}{4} + \frac{2س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} \right]_{0}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right) - 0$$

$$= -\frac{7}{12}$$

مساحة المنطقة ب = $\frac{7}{12}$ وحدة مربعة

المساحة الكلية تساوي $11\frac{1}{4} + \frac{7}{12} = 11\frac{5}{6}$ وحدة مربعة

مثال 2:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = 8 ـ س^3، محور ص والمستقيمين ص = 0، ص = 9. ارسم الأشكال البيانية وظلل المنطقة المطلوبة.

ص = 8 ـ س^3

عندما س = 0، ص = 8

المنحنى يقطع محور ص عند 8

المساحة المطلوبة في جزأين، موضحين أ، ب

عند ص = 0، 0 = 8 ـ س^3

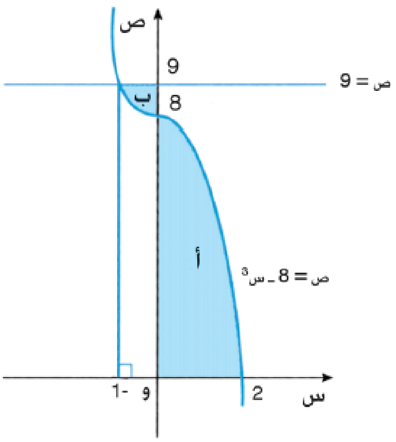
$\Leftarrow$ س = 2

عند ص = 9، 9 = 8 ـ س^3

$\Leftarrow$ س = ـ 1

هذه القيمة لكل من س، ص تساعد في رسم الأشكال البيانية.

المساحة المطلوبة هي (أ + ب) (نأخذ القيمة المطلقة في الحالتين).



مساحة أ تتعين كالآتي :

أ $= \int_{0}^{8}$ س ء ص

ص = 8 ـ س^3

$\Leftarrow$ س^3 = 8 ـ ص

$\Leftarrow$ س = $(8 - \text{ص})^{\frac{1}{3}}$

أ $= \int_{0}^{8} (8 - \text{ص})^{\frac{1}{3}}$ ءص

$= \left[\dfrac{(8 - \text{ص})^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}(-1)} \right]_{0}^{8}$

$= \left[\dfrac{-3\,(8 - \text{ص})^{\frac{4}{3}}}{4} \right]_{0}^{8}$

$= (0) - \left(- \dfrac{3 \times 16}{4} \right)$

= 12 وحدة مربعة

مساحة ب = $\int_{8}^{9}$ س ء ص

$= \int_{8}^{9} (8 - \text{ص})^{\frac{1}{3}}$ ءص

$= \left[\dfrac{-3\,(8 - \text{ص})^{\frac{4}{3}}}{4} \right]_{8}^{9}$

$= \left(- \dfrac{3}{4} \right) - 0$

$= - \dfrac{3}{4}$

مساحة ب تساوي $\frac{3}{4}$ وحدة مربعة (بأخذ القيمة المطلقة).

المساحة المطلوبة = 12 + $\frac{3}{4}$ = $12\frac{3}{4}$ وحدة مربعة

مثال 3:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = 6 س ـ $س^2$ والخط المستقيم ص = س

الحـــل

نقط تقاطع المنحنى ص = 6 س ـ $س^2$، و الخط المستقيم ص = س نحصل عليها بحل هاتين المعادلتين.

ص = 6س ـ $س^2$

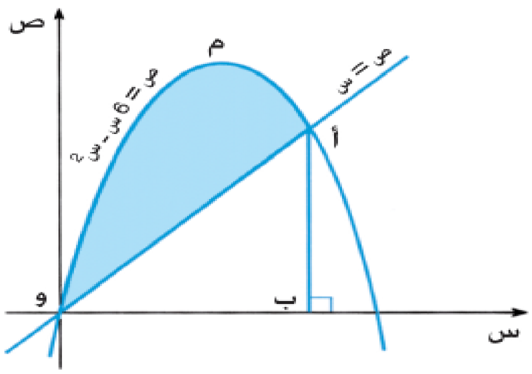
ص = س

عند نقط التقاطع. 6س ـ $س^2$ = س

⇐ 5س ـ $س^2$ = 0

⇐ س (5 ـ س) = 0

⇐ س = 0 أو س = 5



شكل 5 - 11

عند أ، س = 5، ص = 5.

⇐ و ب = 5، أ ب = 5

المساحة المطلوبة تساوي مساحة و م أ ب ـ مساحة △ و أ ب

$$= \int_{0}^{5} (6س - س^2)\, ءس - \frac{1}{2}(5)(5)$$

$$= \left[3س^2 - \frac{س^3}{3}\right]_{0}^{5} - \frac{25}{2}$$

$$= \left(75 - \frac{125}{3}\right) - \frac{25}{2}$$

$$= 75 - 41\frac{2}{3} - 12\frac{1}{2}$$

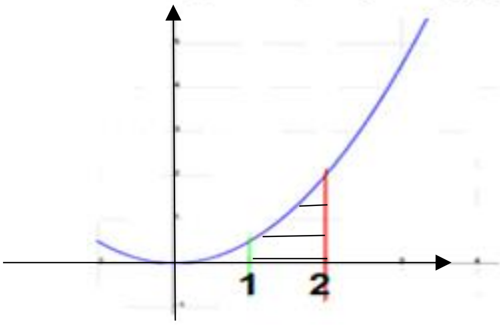
$$= 20\frac{5}{6}$$ وحدة مربعة.

المساحة المطلوبة $= 20\frac{5}{6}$ وحدة مربعة.

تـمرين 5 - 1

1 في كل مما يأتي أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى والخطوط المستقيمة : ارسم المنحنيات في كل حالة :

(أ) ص = $\frac{1}{2}$ س^2، س = 1، س = 2، ص = 0



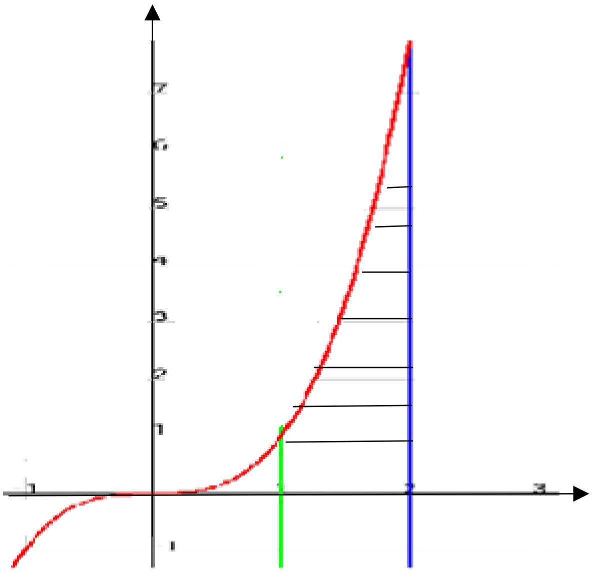
الحل :

$$م = \int_{1}^{2} \frac{1}{2} س^2 \, ء س$$

$$م = \frac{1}{2} \frac{س^3}{3} \Big|_{1}^{2} = \frac{1}{6} (8 - 1) = \frac{7}{6}$$

$$م = 1\frac{1}{6}$$ وحدة مربعة

(ب) ص = س^3، س = 1، س = 2، ص = 0



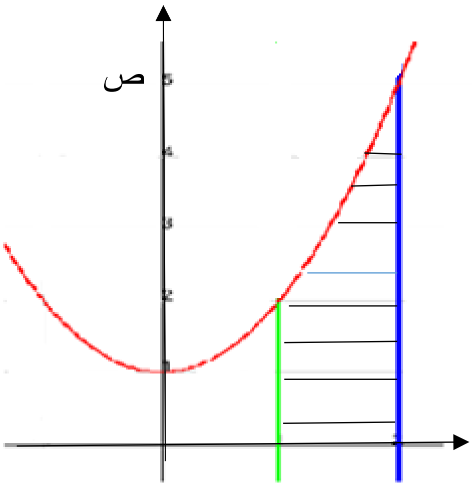
الحل :

$$م = \int_{1}^{2} س^3 \, ء س$$

$$م = \frac{س^4}{4} \Big|_{1}^{2} = \frac{1}{4} (16 - 1) = \frac{15}{4}$$

$$م = 3\frac{3}{4}$$ وحدة مربعة

(جـ) ص = س^2 + 1، س = 1، س = 2، ص = 0



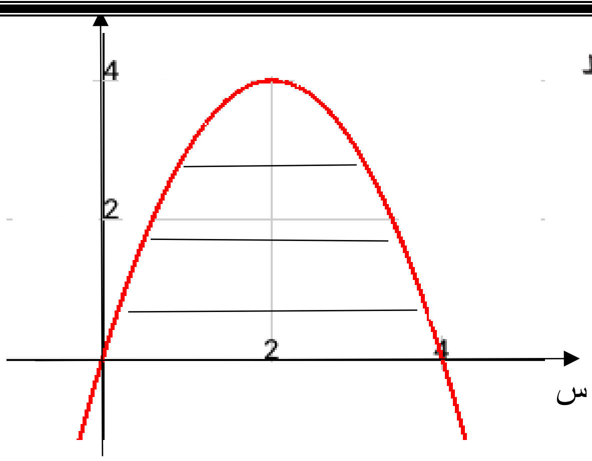
الحل :

$$م = \int_{1}^{2} (س^2 + 1) \, ء س$$

$$م = \frac{س^3}{3} + س \Big|_{1}^{2} = (\frac{8}{3} + 2) - (\frac{1}{3} + 1)$$

$$= \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$ وحدة مربعة

(د) ص = 4س ـ س^2،　　　ص = 0 فقط



الحل :

لإيجاد حدود التكامل نضع ص = 0

4 س – س^2 = 0

س (4 – س) = 0 $\Longleftarrow$ س = 0 ، س = 4

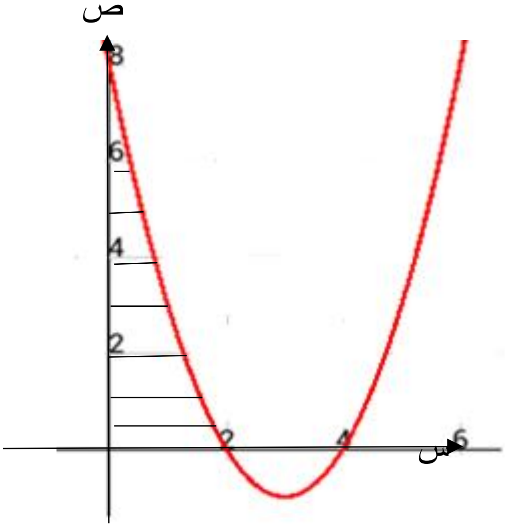
م = $\int_0^4$ (4 س - س^2) ء س

م = 2 س^2 - $\frac{س^3}{3}$ $\Big|_0^4$ = (32 - $\frac{64}{3}$) – 0

= $\frac{96 - 64}{3}$ = $\frac{32}{3}$ = 10 $\frac{2}{3}$ وحدة مربعة

(هـ) ص = س^2 ـ 6س + 8 ،

س = 0، ص = 0



الحل :

ضع ص = 0

س^2 ـ 6س + 8 = 0

(س – 2)(س – 4) = 0 $\Longleftarrow$ س = 2 ، س = 4

منطقة التكامل من 0 إلي 2

م = $\int_0^2$ (س^2 – 6 س + 8) ء س

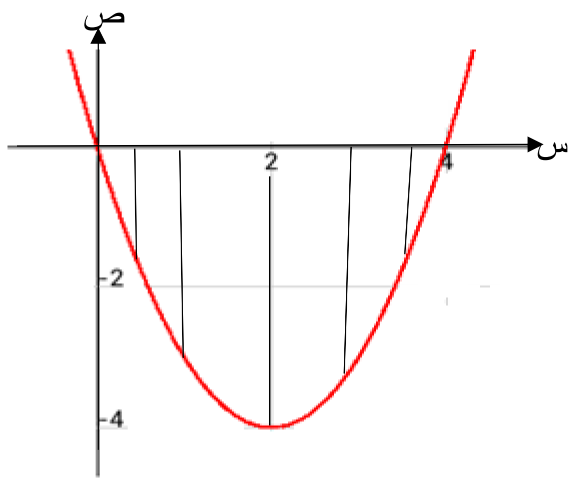
م = $\frac{س^3}{3}$ - 3 س^2 + 8 س $\Big|_0^2$ = ($\frac{8}{3}$ - 3 × 4 + 8 × 2) – 0

= $\frac{8}{3}$ + 4 = $\frac{20}{3}$ وحدة مربعة

م = 6 $\frac{2}{3}$ وحدة مربعة

ص

(و) ص = س^2 ـ 4س،   ص = 0



الحل :

نضع ص = 0 لأيجاد تقاطع المنحنى مع محور السينات حيث هي حدود التكامل

س^2 ـ 4س = 0

س (س ـ 4) = 0   **س = 0** **س = 4**

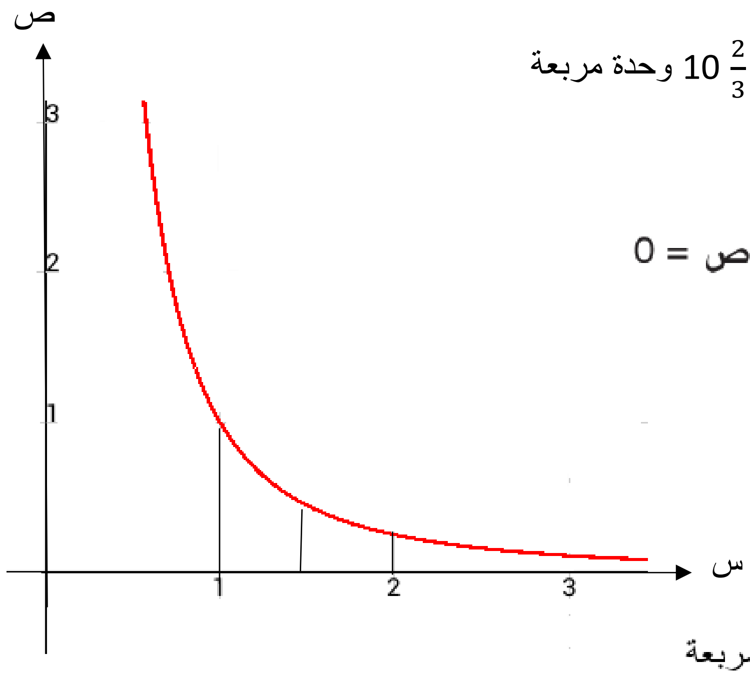
م = $\int_{0}^{4}$ (س^2 - 4 س) ء س

م = $\left.\dfrac{\text{س}^3}{3} - 2\,\text{س}^2\right|_{0}^{4}$ = $\left(\dfrac{64}{3} - 32\right) - 0$

= $\dfrac{64-96}{3}$ = $\dfrac{-32}{3}$ = $10\,\dfrac{2}{3}$ وحدة مربعة

(ز) ص = $\dfrac{1}{\text{س}^2}$،   س = 1،

س = 2، ص = 0



الحل :

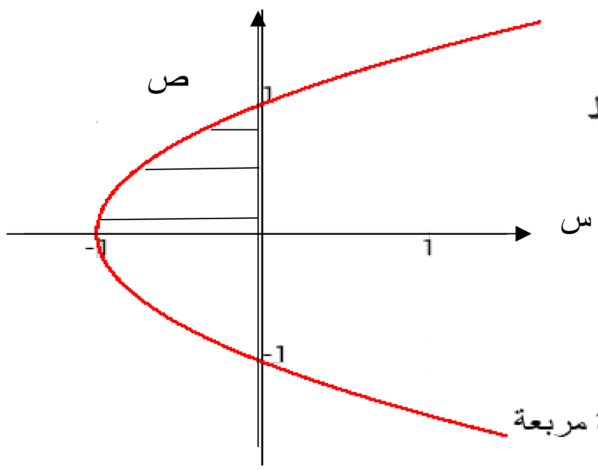
م = $\int_{1}^{2}$ س$^{-2}$ ء س

م = $\left.\dfrac{\text{س}^{-1}}{-1}\right|_{1}^{2}$ = $\left.\dfrac{-1}{\text{س}}\right|_{1}^{2}$

م = - ($\dfrac{1}{2}$ – 1) = - (- $\dfrac{1}{2}$) = $\dfrac{1}{2}$ وحدة مربعة

(ح) ص^2 = 1 + س ، س = 0 ، ص = 0

عندما تكون المساحة فوق محور س فقط

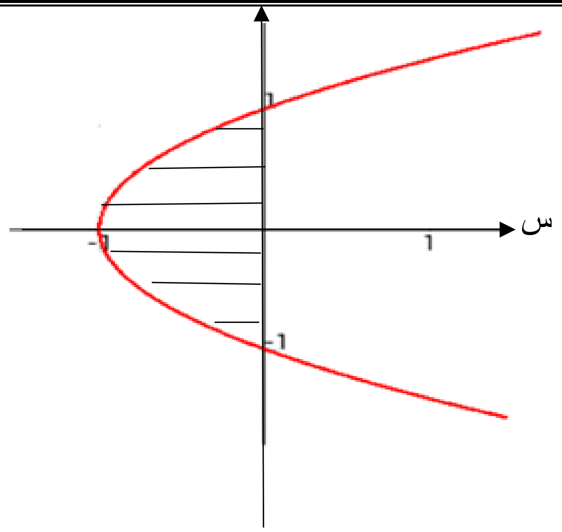


م = $\int_{-1}^{0}$ (س + 1)$^{\frac{1}{2}}$ ء س

م = $\left.\dfrac{(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{-1}^{0}$ = $\left.\dfrac{2}{3}(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}\right|_{-1}^{0}$

= $\dfrac{2}{3}$ (1 – 0) = $\dfrac{2}{3}$ وحدة مربعة

(ط) $ص^2 = 1 + س$ ، $س = 0$ فقط



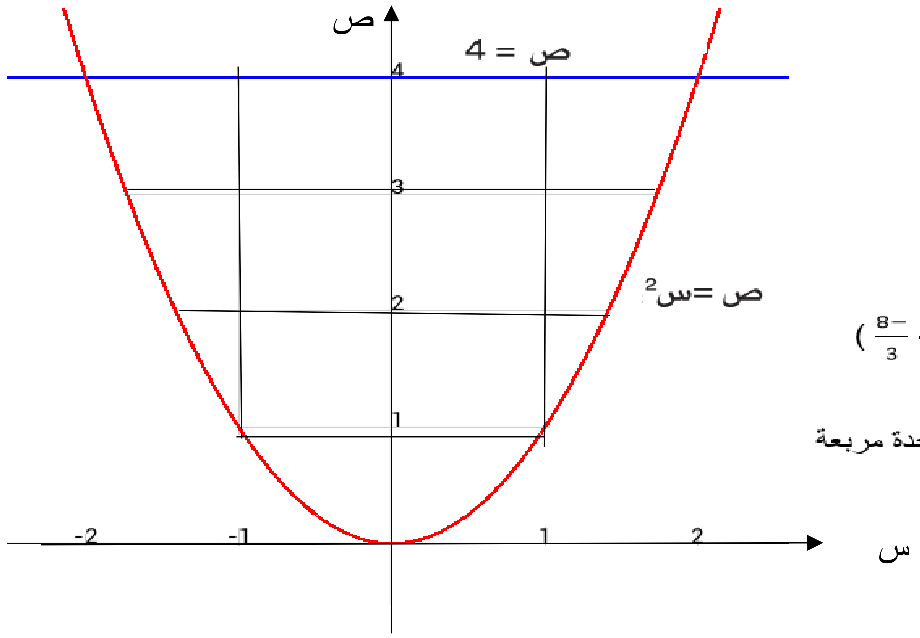
الحل :

من المثال السابق كل جزء مساحته $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$ **وحدة مربعة**

(2) في كل مما يأتي :

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى والخطوط المستقيمة.
وارسم الأشكال البيانية في كل حالة تخطيطيًا.



(أ) $ص = س^2$، $ص = 4$

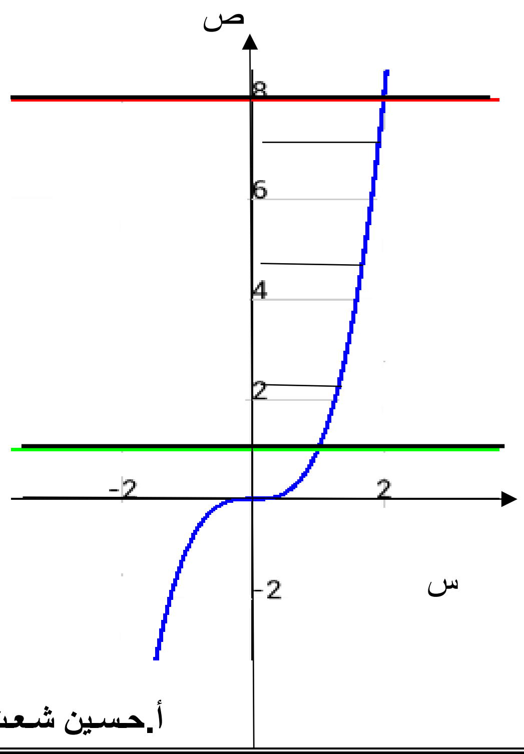
$م = \int_{-2}^{2} (4 - س^2)\ ء س$

$م = 4س - \frac{س^3}{3} \Big|_{-2}^{2}$

$= (4 \times 2 - \frac{8}{3}) - (4 \times -2 - \frac{-8}{3})$

$= (8 - \frac{8}{3}) - (-8 + \frac{8}{3})$

$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$ وحدة مربعة



(ب) $ص = س^3$، $س = 0$ ، $ص = 1$، $ص = 8$

الحل :

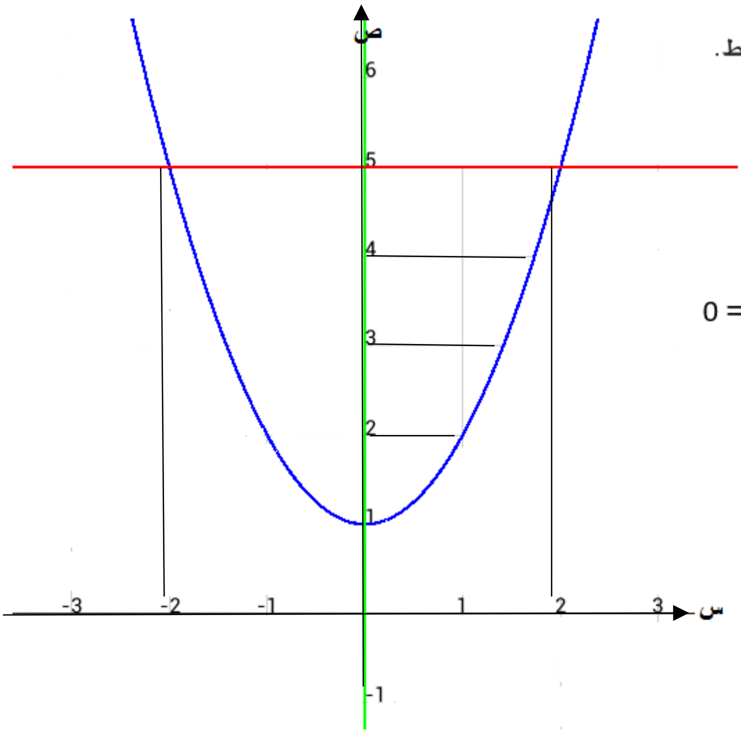
$م = \int_{1}^{8} س^{\frac{1}{3}}\ ء ص$

$م = \frac{س^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_{1}^{8}$

$= \frac{3}{4}(16 - 1)$

$= \frac{3}{4} \times 15 = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$ وحدة مربعة

(جـ) ص = $س^2 + 1$، س = 0، ص = 5 في الربع الأول فقط.



الحل :

نوجد حدود التكامل

ص = $س^2 + 1$ ، ص = 5

∴ $س^2 + 1 = 5$

$س^2 - 4 = 0 \Longleftarrow (س - 2)(س + 2) = 0$

س = 2 ، س = -2

في الربع الأول فقط تكون من 0 إلى 2

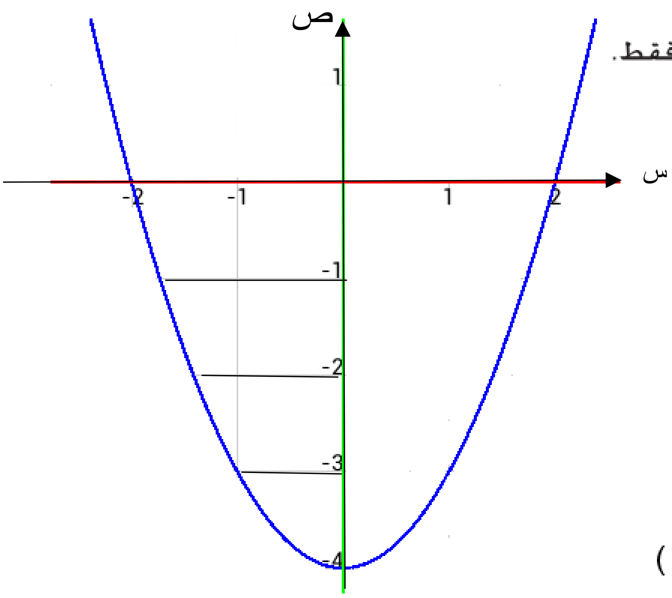
$م = \int_0^2 5 - (س^2 + 1)\ ء س$

$م = \int_0^2 (4 - س^2)\ ء س$

$م = \left(4 س - \frac{س^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}$

$م = 5\frac{1}{3}$ وحدة مربعة

(د) ص = $س^2 - 4$، س = 0، ص = 0 للمنطقة في الربع الثالث فقط.



الحل :

نوجد حدود التكامل

ص = $س^2 - 4$ ، ص = 0

∴ $س^2 - 4 = 0$

$س^2 - 4 = 0 \Longleftarrow (س - 2)(س + 2) = 0$

س = 2 ، س = -2

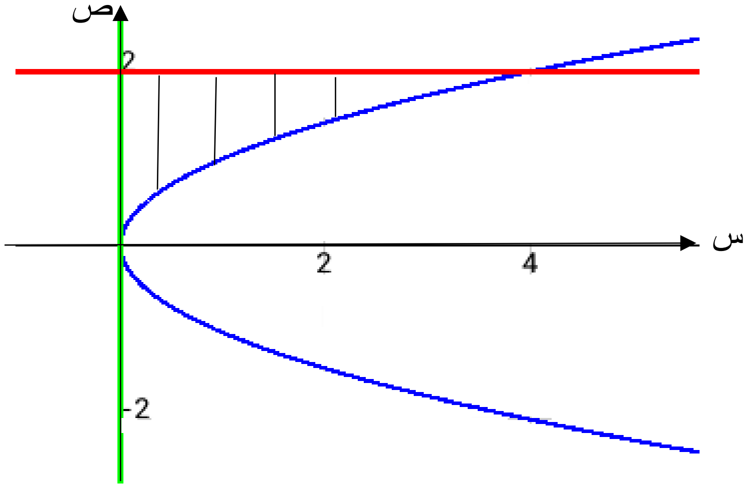
في الربع الثالث فقط تكون من -2 إلى 0

$م = \int_{-2}^0 (س^2 - 4)\ ء س$

$م = \left(\frac{س^3}{3} - 4 س\right)\Big|_{-2}^0 = 0 - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = -\left(\frac{16}{3}\right)$

$م = -5\frac{1}{3}$ وحدة مربعة $\Longleftarrow$ $م = 5\frac{1}{3}$

(هـ) ص^2 = س، س = 0، ص = 2



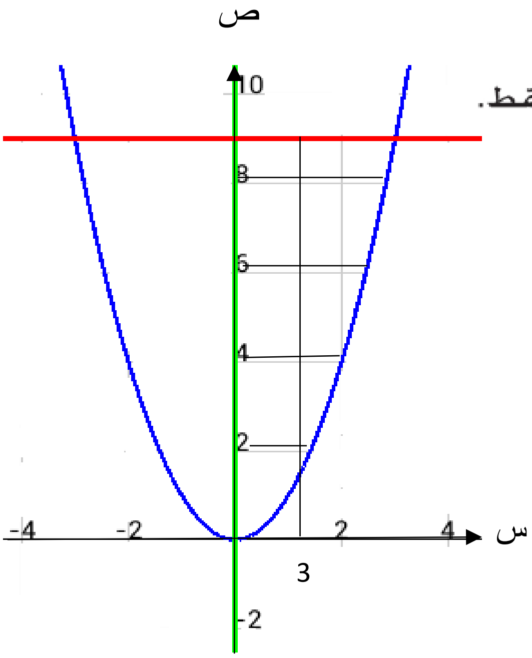
الحل :

$$\text{م} = \int_{0}^{2} \text{ص}^2 \, \text{ء ص}$$

$$\text{م} = \frac{\text{ص}^3}{3} \Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3} - 0$$

$$\text{م} = 2\frac{2}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

(و) ص = س^2، س = 0، ص = 9 للمنطقة في الربع الأول فقط.



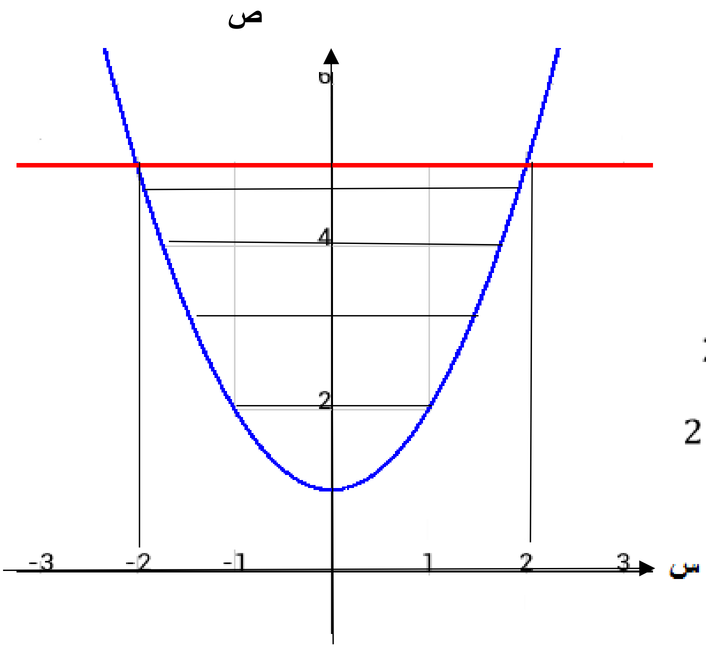
الحل :

$$\text{م} = \int_{0}^{3} (9 - \text{س}^2) \, \text{ء س}$$

$$\text{م} = \left(9\text{س} - \frac{\text{س}^3}{3}\right) \Big|_{0}^{3} = 27 - \frac{27}{3}$$

$$\text{م} = 18 \text{ وحدة مربعة}$$

(ز) ص = س^2 + 1، ص = 5



الحل :

$$\text{م} = \int_{-2}^{2} [\,5 - (\text{س}^2 + 1)\,] \, \text{ء س}$$

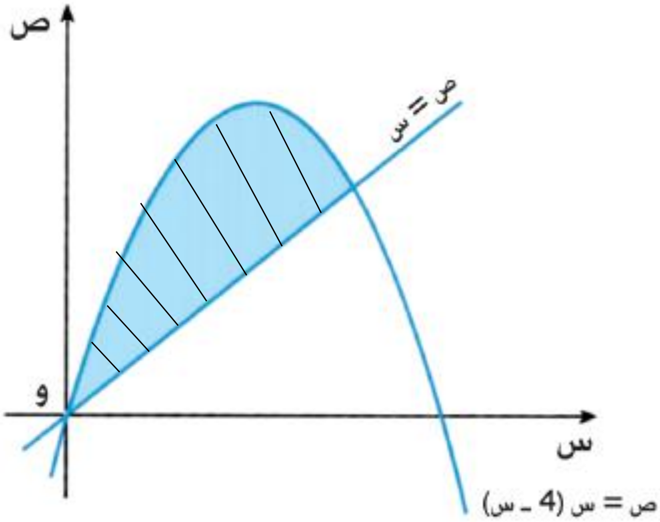
$$\text{م} = \int_{-2}^{2} (4 - \text{س}^2) \, \text{ء س} = 4\text{س} - \frac{\text{س}^3}{3} \Big|_{-2}^{2}$$

$$\text{م} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \left(-\frac{8}{3}\right)\right)$$

$$\text{م} = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\text{م} = 10\frac{2}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

(3) يوضح **الشكل** جزءًا من المنحنى ص = س (4 ـ س) والمستقيم ص = س.
أوجد نقطة تقاطع المنحنى والخط المستقيم. احسب مساحة المنطقة المظللة.



نقطة تقاطع المنحنى والخط المستقيم

س = س (4 – س)

4 س – س^2 = س

س^2 – 3 س = 0

س (س – 3) = 0 ⟸ س = 0 ، س = 3

عندما س = 0 ص = 0 النقطة التقاطع الأولي هي (0 ، 0)

عندما س = 3 ص = 3 النقطة التقاطع الثانية هي (3 ، 3)

م = $\int_{0}^{3}$ [س (4 – س) – س]ءس

م = $\int_{0}^{3}$ [4 س – س^2 – س]ءس

م = $\int_{0}^{3}$ [3 س – س^2]ءس

م = $\left| 3 \frac{س^2}{2} - \frac{س^3}{3} \right|_{0}^{3}$

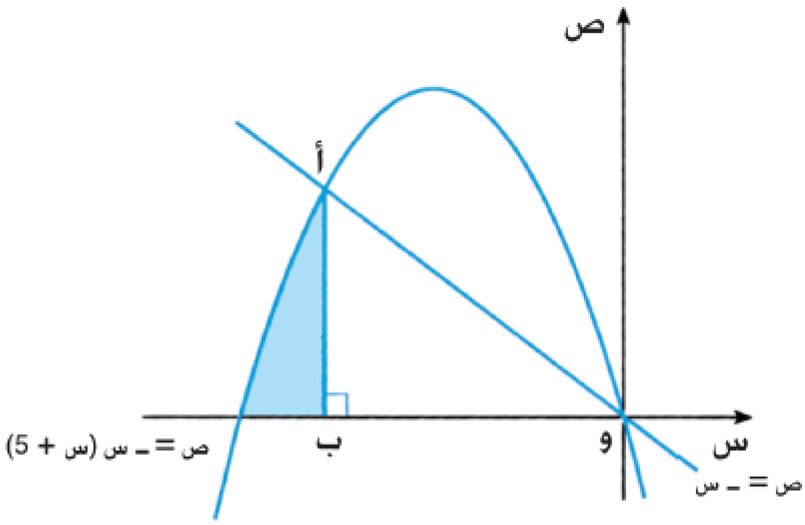
م = $(3 \frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3}) - (3 \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3})$

م = $(2 \times \frac{9}{2} - \frac{27}{3})$

م = $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

(4) يوضح الشكل جزءًا من المنحنى ص = ـ س (س + 5) والمستقيم ص = ـ س. يتقاطع المنحنى والمستقيم عند النقطة أ. احسب إحداثي النقطة أ.

أوجد أيضًا مساحة المنطقة المظللة في الشكل حيث أ ب يوازي محور ص.



نقطة تقاطع المنحني مع محور السينات

- س (س + 5) = 0

س = 0 ، س = - 5

نقطة تقاطع المنحني مع المستقيم ص = - س

- س = - س (س + 5)

- س = - س^2 - 5 س

س^2 + 4 س = 0

س (س + 4) = 0

س = 0 ، س = - 4

المستقيم أ ب عمودي علي النقطة (- 4 , 0)

$$\text{م} = \int_{-5}^{-4} (-\text{س}^2 - 5\,\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[-\frac{\text{س}^3}{3} - \frac{5\text{س}^2}{2} \right]_{-5}^{-4}$$

$$\text{م} = \left(\frac{64}{3} - \frac{80}{2}\right) - \left(\frac{125}{3} - \frac{125}{2}\right)$$

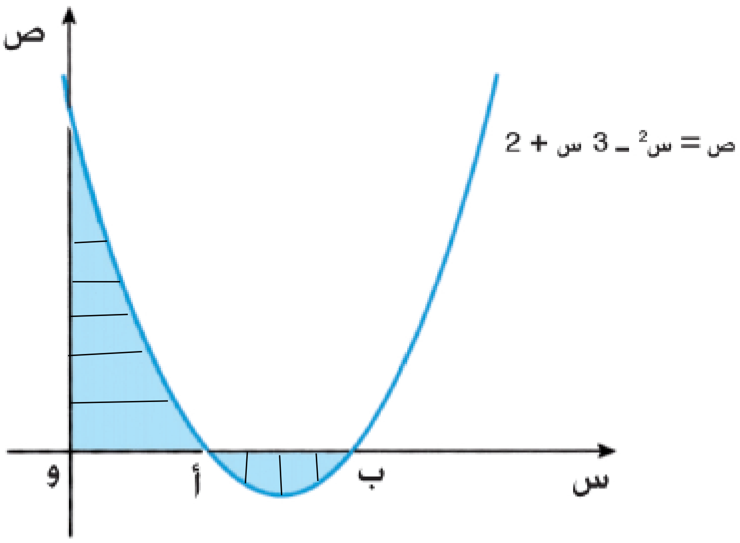
$$\text{م} = \left(\frac{64}{3} - \frac{125}{3}\right) - \left(\frac{80}{2} - \frac{125}{2}\right) = \frac{-61}{3} + \frac{45}{2}$$

$$\text{م} = \frac{-122+135}{6} = \frac{13}{6}$$

$$\text{م} = 2\frac{1}{6}\ \text{وحدة مربعة}$$

(5) المنحنى ص = س^2 ـ 3س + 2 يقطع محور السينات عند أ، ب كما في الشكل

. اذكر إحداثيات أ، ب واحسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل.



نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

س^2 – 3 س + 2 = 0 ⟸ (س – 2) (س – 1) = 0 ⟸ س = 1 ، س = 2

أ = (1 ، 0) ، ب = (2 ، 0)

$$م_1 = \int_0^1 (\text{س}^2 - 3\,\text{س} + 2)\,\text{ءس}$$

$$م_1 = \left[\frac{\text{س}^3}{3} - 3\frac{\text{س}^2}{2} + 2\,\text{س} \right]_0^1$$

$$م_1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) - 0 = \frac{2-9+12}{6}$$

$$م_1 = \frac{5}{6}$$ **وحدة مربعة**

$$م_2 = \int_1^2 (\text{س}^2 - 3\,\text{س} + 2)\,\text{ءس}$$

$$م_2 = \left[\frac{\text{س}^3}{3} - 3\frac{\text{س}^2}{2} + 2\,\text{س} \right]_1^2$$

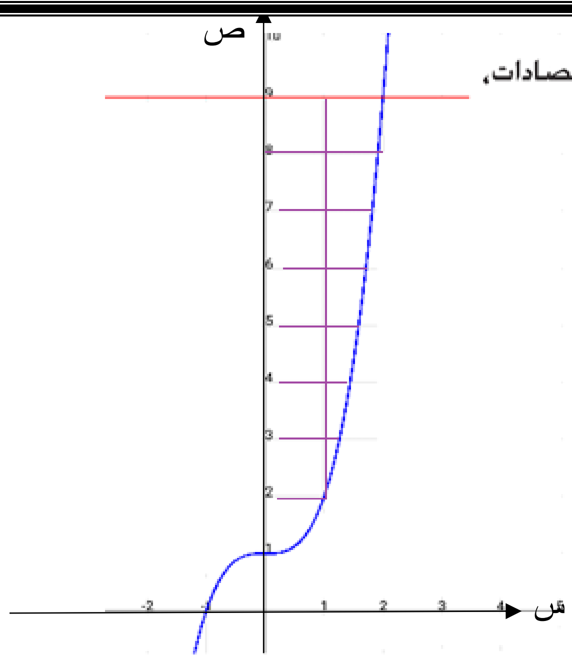
$$م_2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right)$$

$$م_2 = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{4-5}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$م_2 = \frac{1}{6}$$ **وحدة مربعة**

مساحة المنطقة المظللة بالكامل = $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$ وحدة مربعة

(6) أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = س^3 + 1، محور الصادات، الخط المستقيم ص = 9.



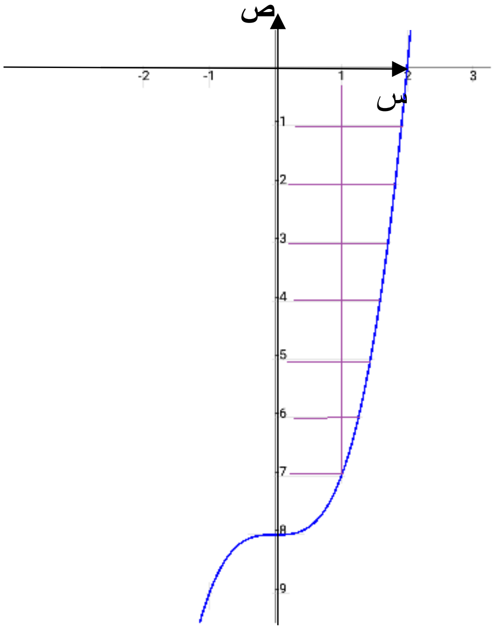
الحل :

$$\text{م} = \int_{1}^{9} (\text{ص} - 1)^{\frac{1}{3}}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{3}{4}(\text{ص} - 1)^{\frac{4}{3}}\Big|_{1}^{9}$$

$$= \frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}} - 0\right) = \frac{3}{4}\left(2^{3}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \times 2^{4} = 12 \text{ وحدة مربعة}$$

(7) أوجد مساحة المنطقة المحاطة بمحور السينات، محور الصادات والمنحنى ص = س^3 ـ 8.



الحل :

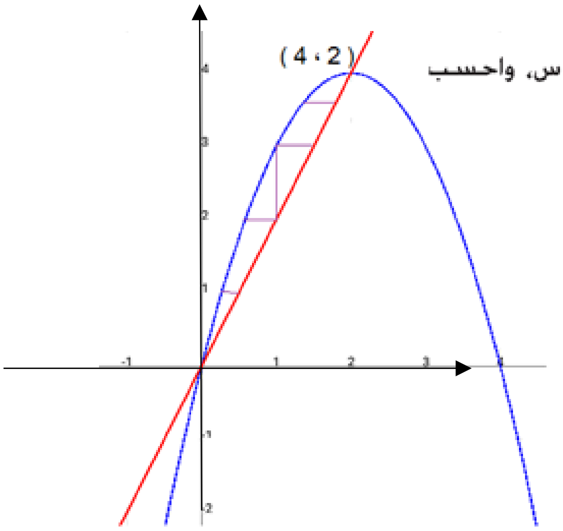
$$\text{م} = \int_{-8}^{0} (\text{ص} + 8)^{\frac{1}{3}}\,\text{ءص}$$

$$= \left|\frac{(\text{ص} + 8)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_{-8}^{0} = \frac{3}{4}(\text{ص} + 8)^{\frac{4}{3}}\Big|_{-8}^{0}$$

$$= \frac{3}{4}\left[(0 + 8)^{\frac{4}{3}} - (-8 + 8)^{\frac{4}{3}}\right] = \frac{3}{4}(0 + 8)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{4}\left(2^{3}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \times 16 = 12 \text{ وحدة مربعة}$$

(8) ارسم تخطيطيًّا المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = س (4 ـ س)، ص = 2 س، واحسب مساحتها.



الحل :

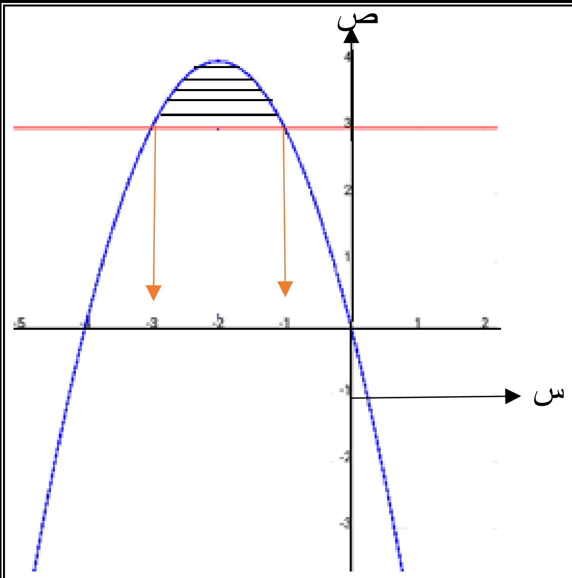
نقطة تقاطع المنحني س (4 − س) مع المستقيم ص = 2 س هي (2 ، 4)

$$\text{م} = \int_{0}^{2} \left(\text{س}(4 - \text{س}) - 2\text{س}\right)\text{ءس} = \int_{0}^{2} \left(4\text{س} - \text{س}^{2} - 2\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{2} \left(2\text{س} - \text{س}^{2}\right)\text{ءس} = \text{س}^{2} - \frac{1}{3}\text{س}^{3}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \left(2^{2} - \frac{2^{3}}{3}\right) - 0 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

(9) احسب مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = ـ س (س + 4)، و الخط المستقيم ص = 3



$$م = \int_{-3}^{-1} (- س (س + 4) - 3) \, ء س = \int_{-3}^{-1} (- س^2 - 4 س - 3) \, ء س$$

$$م = \left(-\frac{س^3}{3} - \frac{4 س^2}{2} - 3 س \right) \Big|_{-3}^{-1}$$

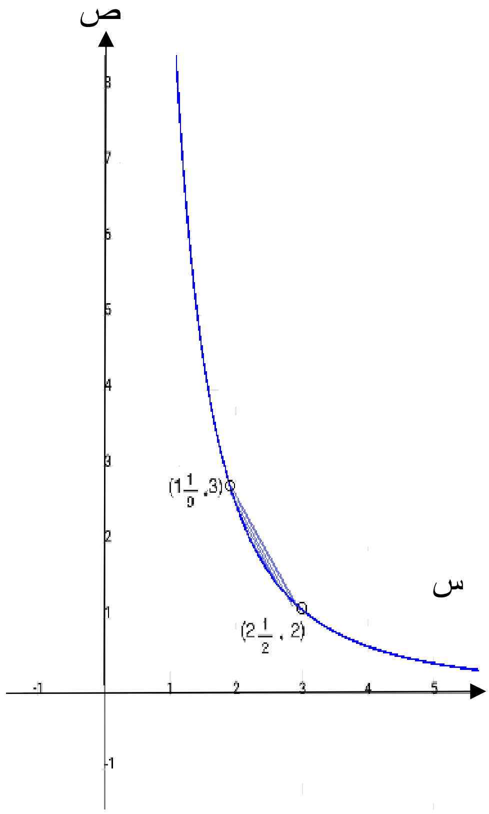
$$= \left(-\frac{-1}{3} - 2 \times 1 - 3 \times -1 \right) - \left(-\frac{-27}{3} - 2\times 9 - 3 \times -3 \right)$$

$$= \frac{4}{3} - 0 = 1\frac{1}{3}$$ وحدة مربعة

(10) ق، ط هما النقطتان $(2 \,،\, 2\frac{1}{2})$ و $(3 \,،\, 1\frac{1}{9})$ على المنحنى ص = $\frac{10}{س^2}$

اثبت أن مساحة المنطقة بين القوس ق ط

والخط المستقيم ق ط تساوي $\frac{5}{36}$ وحدة مربعة.



الحل :

نوجد الميل م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$$م = \frac{1\frac{1}{9} - 2\frac{1}{2}}{3 - 2} = \frac{10}{9} - \frac{5}{2} = -\frac{25}{18}$$

معادلة المستقيم ص - $ص_1$ = م (س - $س_1$)

$$ص - \frac{5}{2} = -\frac{25}{18} (س - 2)$$

$$18 ص - 45 = - 25 س + 50$$

$$25 س + 18 ص - 95 = 0$$

المستقيم ص = $\frac{95 - 25 س}{18}$ ولدينا المنحنى ص = $\frac{10}{س^2}$

$$م = \int_{2}^{3} \left(\frac{95 - 25 س}{18} - \frac{10}{س^2} \right) ء س = \frac{1}{18}\int_{2}^{3} (95 - 25 س) \, ء س - \int_{2}^{3} \frac{10}{س^2} \, ء س$$

$$م = \frac{1}{18} \left(95 س - \frac{25 س^2}{2} \right) \Big|_{2}^{3} - \frac{-10}{س} \Big|_{2}^{3}$$

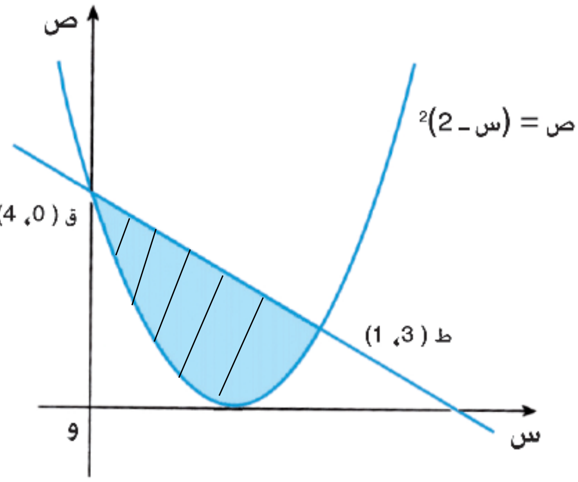
$$= \frac{1}{18} \left[\left(285 - \frac{225}{2} \right) - \left(190 - \frac{100}{2} \right) \right] - \left[\frac{-10}{3} + \frac{10}{2} \right]$$

$$م = \frac{1}{18} \left(\frac{65}{2} \right) - \frac{5}{3} = \frac{5}{36}$$ وحدة مربعة

(11) جزء من المنحنى ص = (س ـ 2)^2 موضح في الشكل

احسب مساحة

المنطقة المحاطة بالمنحنى والمستقيم ق ط



الحل :

لإيجاد معادلة المستقيم

نوجد الميل : $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$م = \frac{4 - 1}{0 - 3} = -1$

معادلة المستقيم هي $ص - ص_1 = م (س - س_1)$

$ص - 4 = -1 (س - 0)$

$ص = 4 - س$

$$م = \int_0^3 \left((4 - س) - (س - 2)^2 \right) ء س$$

$$= \int_0^3 \left((4 - س) - (س^2 - 4س + 4) \right) ء س$$

$$= \int_0^3 (4 - س - س^2 + 4س - 4) ء س$$

$$= \int_0^3 (3س - س^2) ء س$$

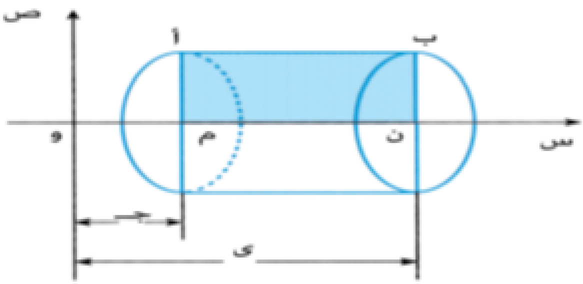
$$م = \left(\frac{3س^2}{2} - \frac{س^3}{3} \right) \Big|_0^3$$

$$= \frac{27}{2} - 9$$

$$= \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$ وحدة مربعة

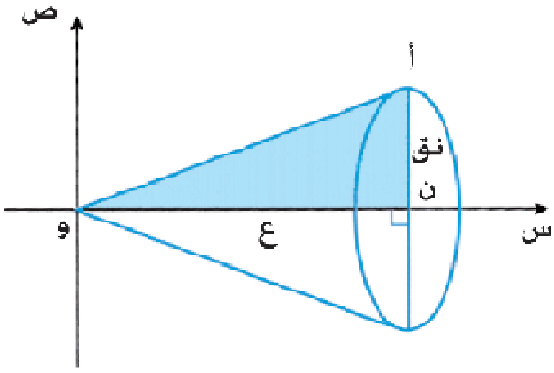
حجم المجسم الناشئ من الدوران :-

عندما يدور مستطيل أ ب ن م حول محور س بزاوية 360 يكون على شكل أسطوانة دائرية طول نصف قطرها أ م



إذا دار المثلث أ و ن حول محور س بزاوية 360 فإنه يكون مخروط دائري قائم حجمه يساوي

$\frac{1}{3}$ π نق^2 ع



طرق حساب الحجم

1) إذا دار المنحني حول محور السينات دورة كاملة فإن حجم الجسم الدوراني المتولد يعطى بالعلاقة .

$$ح = \int_{أ}^{ب} π ص^2 ءس$$

2) إذا دار المنحني حول محور الصادات دورة كاملة فإن حجم الجسم الدوراني المتولد يعطى بالعلاقة .

$$ح = \int_{أ}^{ب} π س^2 ءص$$

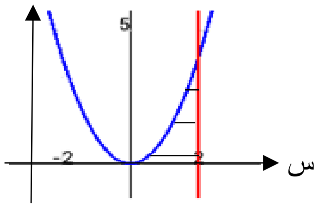
2) إذا دار المنحني حول المحور ك الموازي لمحور السينات دورة كاملة فإن حجم الجسم الدوراني المتولد يعطى بالعلاقة .

$$ح = \int_{أ}^{ب} π (ك - ص)^2 ءس$$

تـمرين 5 - 3

(1) في كل من الحالات الآتية، احسب الحجم المولَّد من دوران المنطقة المحاطة بالمنحنى المعلوم والمستقيم / المستقيمان، عندما تدور دورة كاملة حول محور س.
أعط الإجابة بدلالة π.

(أ) المنحنى ص = س^2 والمستقيمان ص = 0، س = 2



الحل :

ح = $\pi \int_0^2$ ص^2 ءس وحيث ص = س^2

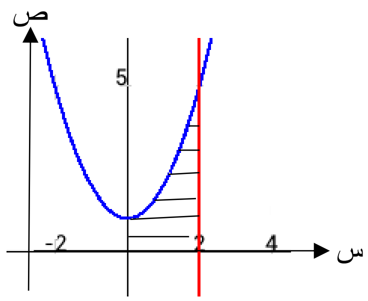
ح = $\pi \int_0^2$ (س^2)^2 ء س

ح = $\pi \left| \frac{\text{س}^5}{5} \right|_0^2$

ح = $\pi \left| \left(\frac{2^5}{5} - 0 \right) \right| = \frac{32}{5}\pi$

ح = $6\frac{2}{5}\pi$ وحدة مكعبة .

(ب) المنحنى ص = س^2 + 1 والمستقيمات ص = 0، س = 0، س = 2



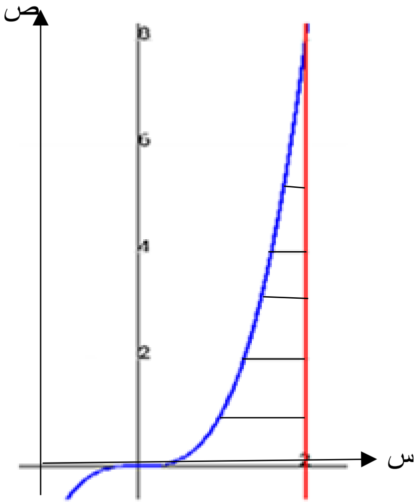
الحل :

ح = $\pi \int_0^2$ ص^2 ءس وحيث ص = س^2 + 1

ح = $\pi \int_0^2$ (س^2 + 1)^2 ء س

ح = $\pi \left| \frac{\text{س}^5}{5} + 2\frac{\text{س}^3}{3} + \text{س} \right|_0^2$

ح = $\pi \left| \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right) \right| = \frac{206}{15}\pi$ $\Longleftarrow$ ح = $13\frac{11}{15}\pi$ وحدة مكعبة .



(جـ) المنحنى ص = س^3 والمستقيمان ص = 0، س = 2

الحل :

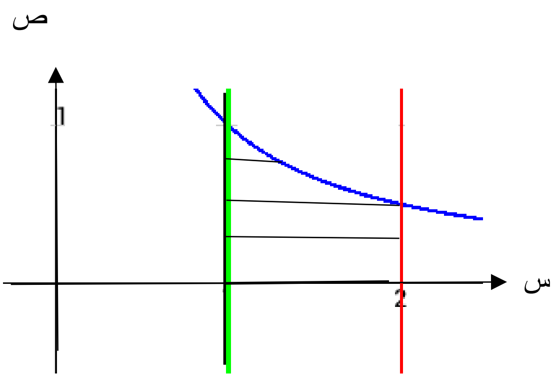
$$\text{ح} = \int_0^2 \pi\, \text{ص}^2 \,\text{ء س} \quad \text{وحيث ص} = \text{س}^3$$

$$\text{ح} = \int_0^2 \pi\, \text{ص}^6 \,\text{ء س}$$

$$\text{ح} = \left| \pi \frac{\text{س}^7}{7} \right|_0^2$$

$$\text{ح} = \pi\left(\frac{2^7}{7} - 0\right) = \frac{128}{7}\pi$$

$$\text{ح} = 18\frac{2}{7}\pi \text{ وحدة مكعبة .}$$



(د) المنحنى ص = $\frac{1}{\text{س}}$ والمستقيمان ص = 0، س = 1، س = 2

الحل :

$$\text{ح} = \int_1^2 \pi\, \text{ص}^2 \,\text{ءس} \quad \text{وحيث ص} = \frac{1}{\text{س}}$$

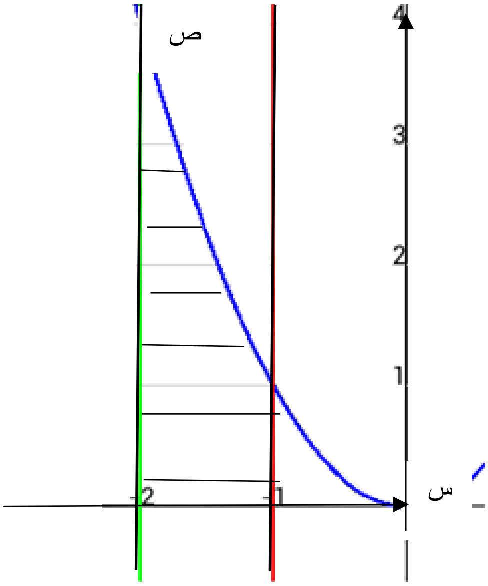
$$\text{ح} = \int_1^2 \pi \frac{1}{\text{س}^2} \,\text{ء س}$$

$$\text{ح} = \left| \pi \frac{-1}{\text{س}} \right|_1^2$$

$$\text{ح} = \left| \pi\left(\frac{-1}{2} + 1\right) \right|$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{2} \text{ وحدة مكعبة}$$

(هـ) المنحنى ص = س^2 والمستقيمان ص = 0، س = ـ 2، س = ـ 1



الحل :

$$ح = \int_{-2}^{-1} \pi \, ص^2 \, ء س \quad \text{وحيث} \quad ص = س^2$$

$$ح = \int_{-2}^{-1} \pi \, س^4 \, ء س$$

$$ح = \left| \pi \frac{س^5}{5} \right|_{-2}^{-1}$$

$$ح = \left| \pi \left(\frac{-1}{5} + \frac{32}{5} \right) \right|$$

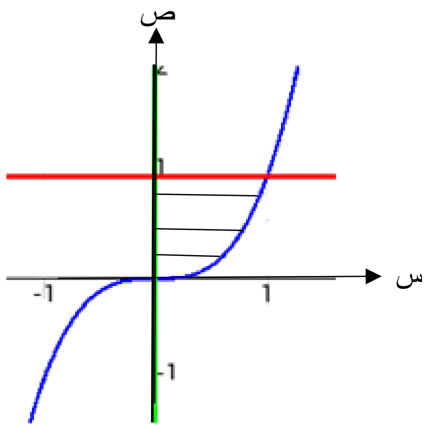
$$ح = \frac{31}{5} \pi$$

$$ح = 6\frac{1}{5} \pi \quad \text{وحدة مكعبة}$$

(2) في كل من الحالات الآتية، احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران عندما تدور المنطقة المحاطة بالمنحنى المعلوم والمستقيم / المستقيمات دورة كاملة حول محور ص.

أعط الإجابة بدلالة π

(أ) المنحنى ص = س^3، المستقيمان س = 0، ص = 1



الحل :

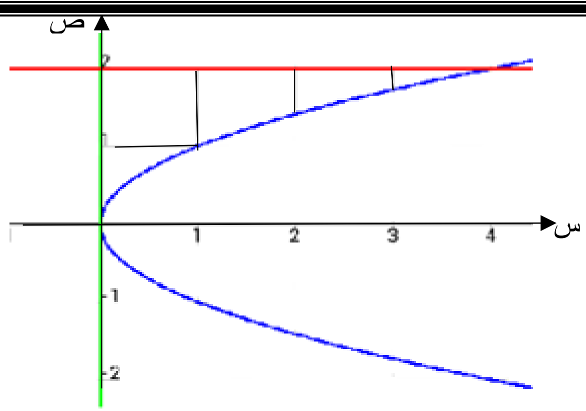
$$ح = \int_{0}^{1} \pi \, س^2 ءص \quad \text{وحيث} \quad ص = س^3 \Longleftarrow س = ص^{\frac{1}{3}}$$

$$ح = \int_{0}^{1} \pi \, ص^{\frac{2}{3}} ءص = \left| \pi \frac{ص^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right|_{0}^{1} = \left| \frac{3\pi}{5} ص^{\frac{5}{3}} \right|_{0}^{1}$$

$$ح = \frac{3\pi}{5} \times 1^{\frac{5}{3}}$$

$$ح = \frac{3\pi}{5} \quad \text{وحدة مكعبة}$$

(ب) المنحنى $ص^2 = س$ والمستقيمان س =0، ص = 2



الحل :

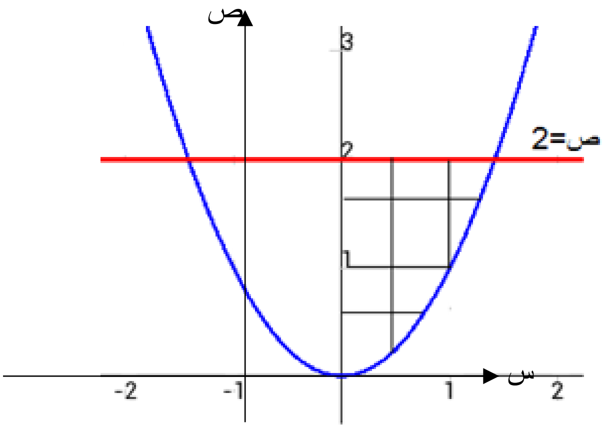
$ح = \int_0^2 \pi س^2 ء ص$ وحيث $ص^2 = س$

$ح = \int_0^2 \pi ص^4 ء ص$

$ح = \left| \pi \frac{ص^5}{5} \right|_0^2 = \frac{32}{5}\pi$

$ح = 6\frac{2}{5}\pi$ وحدة مكعبة .

(جـ) المنحنى $ص = س^2$ والمستقيمان س = 0، ص = 2 في الربع الأول



الحل :

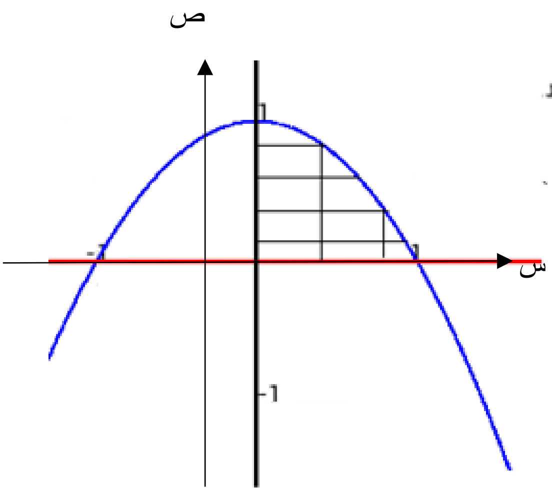
$ح = \int_0^2 \pi س^2 ء ص$ وحيث $ص = س^2$

$ح = \int_0^2 \pi ص ء ص$

$ح = \left| \pi \frac{ص^2}{2} \right|_0^2 = \frac{4}{2}\pi$

$ح = 2\pi$ وحدة مكعبة

(د) المنحنى $ص = (1 + س)(1 - س)$ والمحوران السيني والصادي للمنطقة في الربع الأول فقط



الحل :

$ح = \int_0^1 \pi س^2 ء ص$ وحيث $ص = 1 - س^2$

$س^2 = 1 - ص$

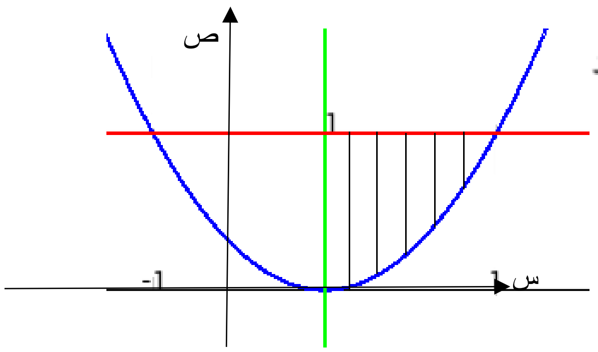
$ح = \int_0^1 \pi (1 - ص) ء ص$

$ح = \left| \pi (ص - \frac{ص^2}{2}) \right|_0^1$

$ح = \left| \pi (1 - \frac{1^2}{2}) \right|_0^1 = \left| -\frac{1}{2}\pi \right|$

$ح = \frac{1}{2}\pi$ وحدة مكعبة

(3) أوجد حجم الجسم المولد عندما تدور المنطقة المحاطة بالمنحنى المعلوم والمستقيمات في كل من الحالات الآتية حول المحور المعلوم. أوجد الإجابة بدلالة π.



(أ) ص = س²، س = 0، ص = 1 حول المستقيم ص = 1 في الربع الأول فقط

الحل :

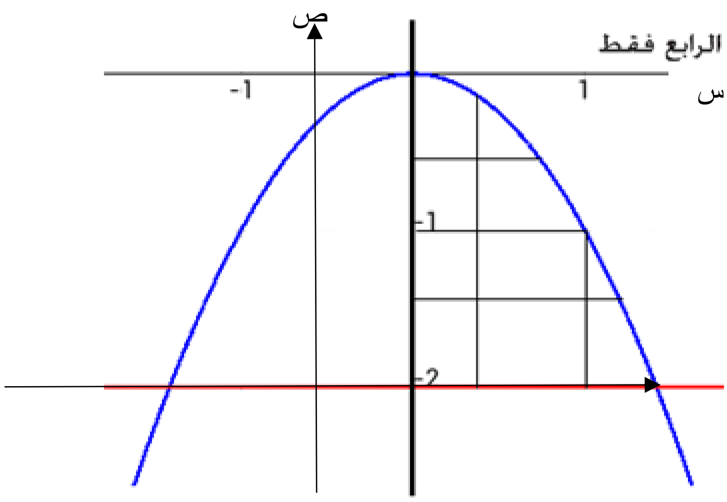
$$\text{ح} = \int_0^1 \pi\,(1 - \text{س}^2)^2 \,\text{ءس}$$

$$\text{ح} = \int_0^1 \pi\,(1 - 2\text{س}^2 + \text{س}^4)\,\text{ءس}$$

$$\text{ح} = \left| \pi\,\left(\text{س} - 2\frac{\text{ص}^3}{3} + \frac{\text{ص}^5}{5}\right) \right|_0^1$$

$$\text{ح} = \left| \pi\,\left(\frac{15 - 10 + 3}{15} \right) \right|$$

$$\text{ح} = \frac{8\pi}{15}$$ وحدة مكعبة .



(ب) ص = ـ س²، س = 0، ص = ـ 2 حول المستقيم ص = ـ 2 في الربع الرابع فقط

الحل :

$$\text{ح} = \int_0^{\sqrt{2}} \pi\,(-2 + \text{س})^2 \,\text{ء س}^2$$

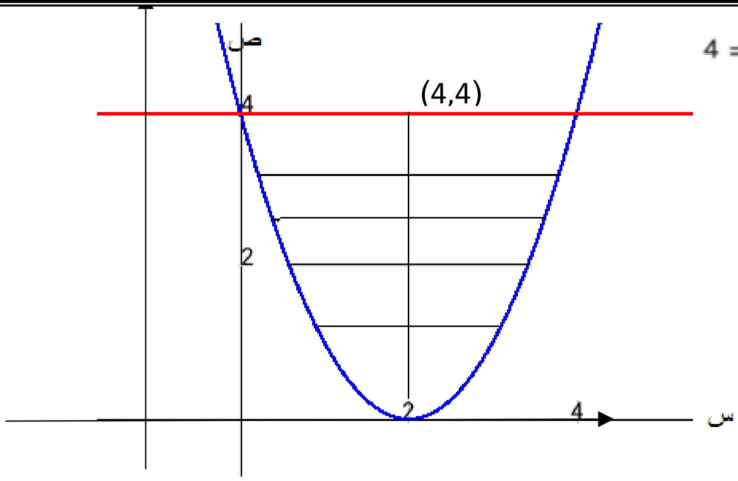
$$\text{ح} = \int_0^{\sqrt{2}} \pi\,(4 - 4\text{س}^2 + \text{س}^4)\,\text{ء س}$$

$$\text{ح} = \left| \pi\,\left(4\text{س} - \frac{4\text{س}^3}{3} + \frac{\text{س}^5}{5}\right) \right|_0^{\sqrt{2}}$$

$$\text{ح} = \left| \pi\,\left(\frac{60\sqrt{2} - 40\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{15} \right) \right|$$

$$\text{ح} = \frac{32\sqrt{2}}{15}\,\pi$$ وحدة مكعبة

(جـ) ص = س^{2} ـ 4س + 4، ص = 4 حول المستقيم ص = 4



الحل :

4 – (س^{2} – 4 س + 4) = 4 س – س^{2}

(4 س – س^{2})^{2} = **16 س^{2} - 8 س^{3} + س^{4}**

كذلك لإيجاد نقطة تقاطع المنحني مع المستقيم

نعوض في المنحني عن ص = 4

س^{2} – 4 س + 4 = 4 ⟸ س(4 – س)

ومنها س = 4 عند ص = 4 (4 , 4)

ح = $\int_{0}^{4}$ π (**16 س^{2} - 8 س^{3} + س^{4}**) ءس

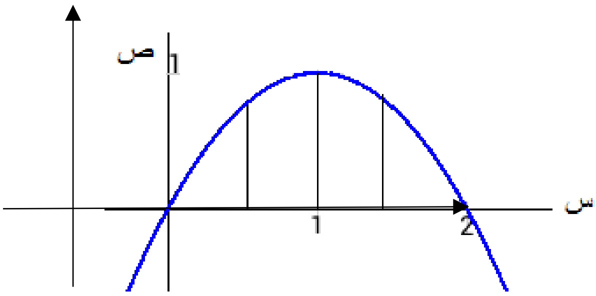
ح = π | ($\frac{16\ س^{3}}{3}$ - $\frac{8\ س^{4}}{4}$ + $\frac{س^{5}}{5}$) |$_{0}^{4}$

ح = π | ($\frac{64\times16\times5}{15}$ - $\frac{256\times2\times15}{15}$ + $\frac{1024\times3}{15}$) |

ح = π | ($\frac{5120 - 7680 + 3072}{15}$) |

ح = $\frac{2}{15}$ 34 π وحدة مكعبة .

(4) ارسم تخطيطيًّا المنحنى ص = س (2 ـ س). دارت المنطقة المحاطة بالمنحنى، محور س أربع زوايا قوائم حول محور السينات. احسب الحجم المولد بدلالة π.



الحل :

ح = $\int_{0}^{2}$ π ص^{2} ء س وحيث ص = 2س - س^{2}

ح = $\int_{0}^{2}$ π (2س - س^{2})^{2} ء س

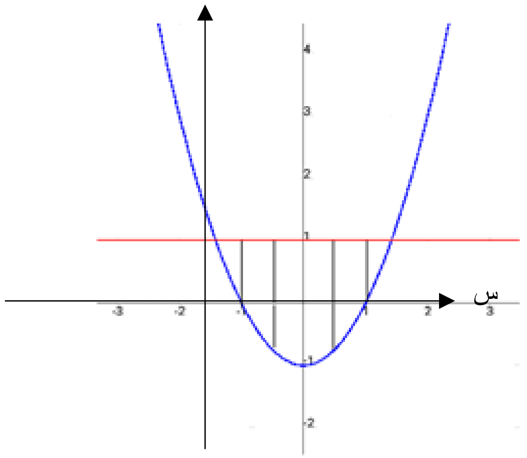
ح = $\int_{0}^{2}$ π (4 س^{2} – 4 س^{3} + س^{4}) ءس

ح = π |(4 $\frac{س^{3}}{3}$ - $\frac{4\ س^{4}}{4}$ + $\frac{س^{5}}{5}$)|$_{0}^{2}$

ح = π | ($\frac{160 - 240 + 96}{15}$) | = $\frac{16}{15}$ π

ح = $\frac{1}{15}$ 1 π وحدة مكعبة .

(5) المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = س^2 ـ 1 والمستقيم ص = 1 دارت 180° حول محور السينات. احسب الحجم المولد بالدوران بدلالة π.



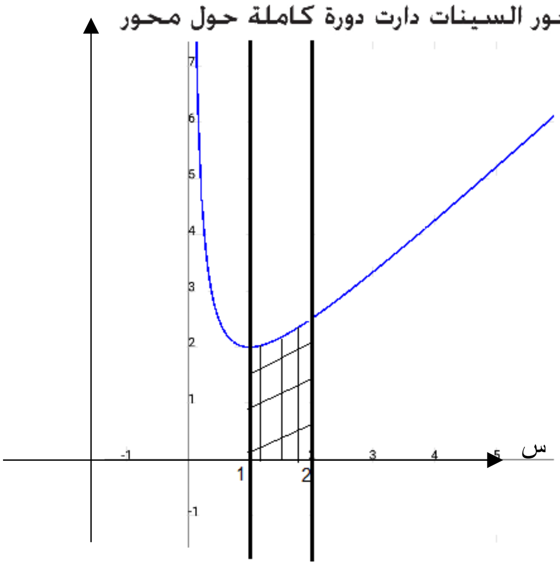
الحل :

$$ح = \pi \int_{-1}^{1} (ص + 1)\ ء ص$$

$$= \pi \left[\frac{ص^2}{2} + ص \right]_{-1}^{1}$$

$$ح = \pi \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \right] = 2\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

(6) المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = س + $\frac{1}{س}$، المستقيمان س = 1، س = 2، محور السينات دارت دورة كاملة حول محور السينات. احسب حجم المجسم الذي كون من الدوران.



الحل :

$$ح = \pi \int_{1}^{2} \left(س + \frac{1}{س}\right)^2 ء س$$

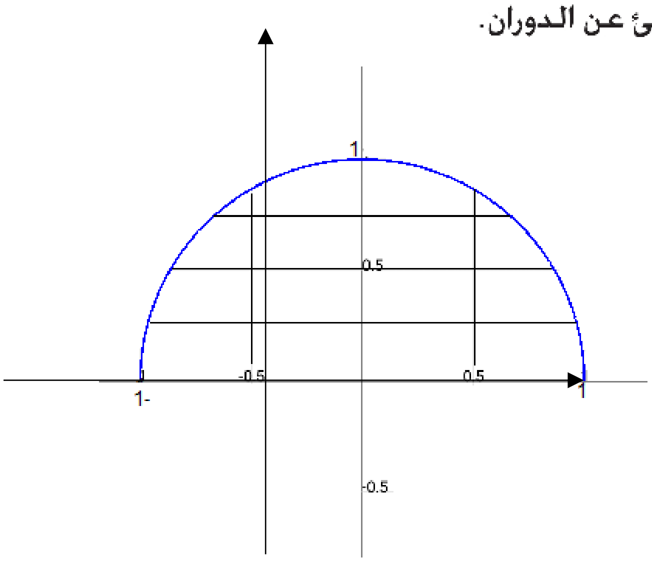
$$\pi \int_{1}^{2} \left(س^2 + 2 + \frac{1}{س^2}\right) ء س$$

$$= \pi \left[\frac{س^3}{3} + 2س - \frac{1}{س} \right]_{1}^{2}$$

$$ح = \pi \left[\left(\frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + 2 - 1\right) \right] = \frac{29}{6}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

$$= 4\frac{5}{6}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

(7) المنطقة المحاطة بالمنحنى ص=$\sqrt{1 - س^2}$، محور السينات دارت دورة كاملة حول محور السينات. احسب الحجم المجسم الناشئ عن الدوران.



الحل :

$$ح = \pi \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - س^2}\right)^2 ء س$$

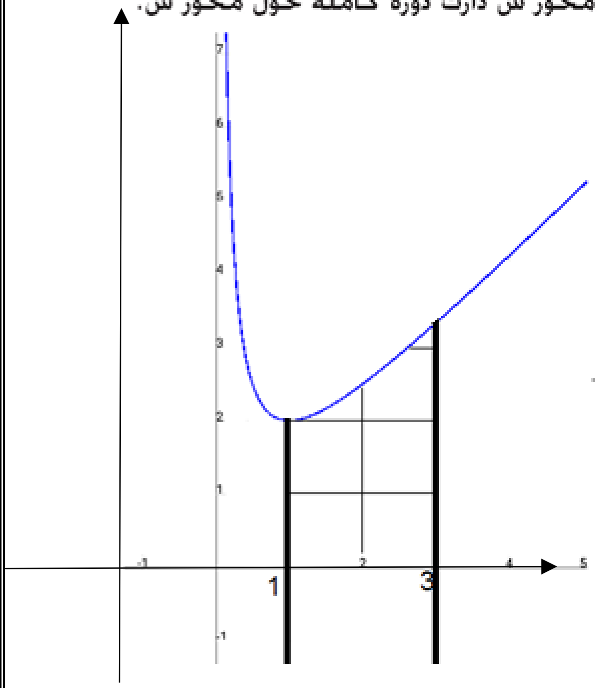
$$= \pi \int_{-1}^{1} (1 - س^2)\ ء س$$

$$= \pi \left[س - \frac{س^3}{3} \right]_{-1}^{1}$$

$$ح = \pi \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right] = \frac{4}{3}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

$$= 1\frac{1}{3}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

(8) المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = س + $\frac{1}{س}$ والمستقيمان س = 1، س = 3، محور س دارت دورة كاملة حول محور س. أوجد بدلالة π حجم الجسم الناشئ.



الحل :

$$ح = \pi \int_{1}^{3} (س + \frac{1}{س})^2 \, ء س$$

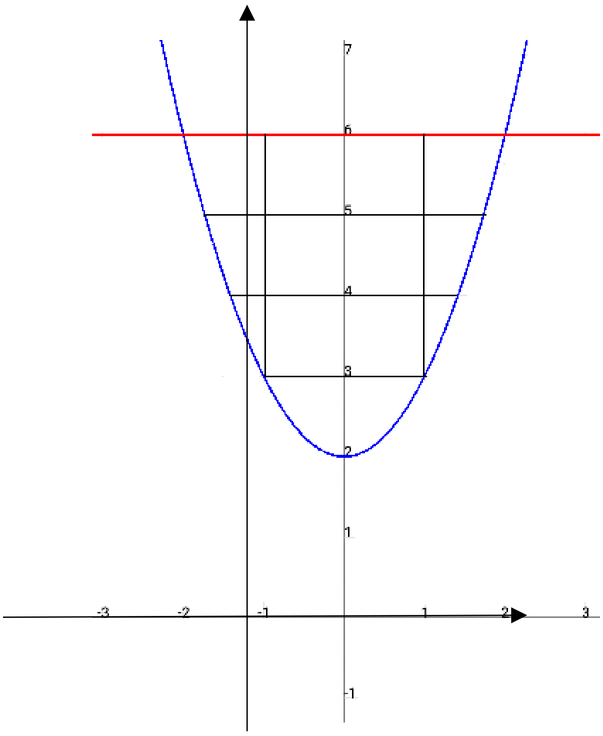
$$= \pi \int_{1}^{3} (س^2 + 2 + \frac{1}{س^2}) \, ء س$$

$$= \pi \left| \frac{س^3}{3} + 2س - \frac{1}{س} \right|_{1}^{3}$$

$$ح = \pi [(\frac{27}{3} + 6 - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{3} + 2 - 1)] = \frac{40}{3} \pi \text{ وحدة مكعبة}$$

$$= 13\frac{1}{3} \pi \text{ وحدة مكعبة}$$

(9) ارسم المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = س ^{2} + 2 والمستقيم ص = 6. احسب حجم الجسم المكون عندما تدور هذه المنطقة بمقدار زاويتين قائمتين حول محور الصادات.



الحل :

$$ح = \pi \int_{2}^{6} (ص - 2) \, ء ص$$

$$= \pi \left| \frac{ص^2}{2} - 2ص \right|_{2}^{6}$$

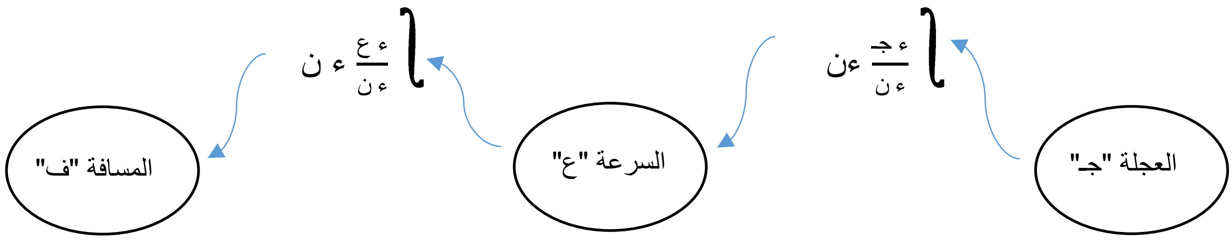
$$ح = \pi [(\frac{36}{2} - 12) - (\frac{4}{2} - 4)] = 8 \pi \text{ وحدة مكعبة}$$

الحركة في خط مستقيم :

إذا كان ف = د(ن) حيث ف بالأمتار ترمز للإزاحة و ن بالثانية ترمز للزمن ، للجسيم

فإن ع = $\frac{ءف}{ءن}$ يساوي سرعة الجسيم بالمتر / ث

فإذا رمزنا للسرعة بالرمز ع فإن العجلة جـ = $\frac{ءع}{ءن}$ ، وهي بوحدة م/ث^2



ملاحظة : إذا لم يتغير اتجاه حركة الجسيم، فإن المسافة الكلية المقطوعة في ب ثانية تساوي د(ب) ـ د(0). في التكامل نعبر عن هذا بالصورة $\int_0^{ب}$ ع ء ن. للفترة الزمنية من ب ثانية إلى ى ثانية فإن المسافة المقطوعة تساوى $\int_{ب}^{ى}$ ع ء ن

تمرين 5 - 4

(1) إذا كان $\frac{ءف}{ءن}$ = 6ن ، فأوجد ف بدلالة ن بفرض أن ف = 1 عندما ن = 0.

الحل :

ف = ∫ 6 ن ءن

ف = 3 ن^2 + ث ، ف = 1 ، ن = 0

1 = 3 × 0 + ث ∴ ث = 1

ف = 3 ن^2 + 1

(2) إذا كان $\frac{ءف}{ءن}$ = 1 ـ 2ن ، فأوجد ف بدلالة ن بفرض أن ن = 0 عندما ف = 0.

الحل:

ف = ∫ (1 - 2 ن) ءن

ف = ن – ن^2 + ث ، ف = 0 ، عندما ن = 0

0 = 0 + ث ∴ ث = 0

ف = ن – ن^2

(3) إذا كان $\frac{ءف}{ءن} = 3ن^2$ ، ف = 2 عندما ن = 0 ، فأوجد ف بدلالة ن.

الحل:

$ف = \int 3ن^2 \, ءن$

$ف = ن^3 + ث$ ، ف = 2 عندما ن = 0

2 = 0 + ث ∴ ث = 2

$ف = ن^3 + 2$

(4) إذا كان $\frac{ء^2ف}{ءن^2} = 2ن$ ، ف = 0 ، $\frac{ءف}{ءن} = 0$ عندما ن = 0 ، فأوجد ف بدلالة ن.

الحل:

$ع = \int 2ن \, ءن$

$ع = ن^2 + ث$ ، ع = 0 عندما ن = 0

0 = 0 + ث ∴ ث = 0

$ع = ن^2$

$ف = \int ن^2 \, ءن$

$ف = \frac{ن^3}{3} + ث_1$ ، ف = 0 عندما ن = 0

$0 = 0 + ث_1$ ∴ $ث_1 = 0$

$ف = \frac{1}{3}ن^3$

(5) إذا كان $\frac{ء^2ف}{ءن^2} = 24ن$ ، $\frac{ءف}{ءن} = 1$، ف = 0 عندما ن = 0 ، فأوجد ف بدلالة ن.

الحل:

$ع = \int 24ن \, ءن$

$ع = 12ن^2 + ث$ ، ع = 1 عندما ن = 0

1 = 0 + ث ∴ ث = 1

$ع = 12ن^2 + 1$

$ف = \int (12ن^2 + 1) \, ءن$

$ف = 4ن^3 + ن + ث_1$ ، ف = 0 عندما ن = 0 ∴ $ث_1 = 0$

$ف = 4ن^3 + ن$

(6) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث عجلته بعد ن ثانية تساوي جـ م/ ث^2، حيث جـ = ن^2 - 2ن إذا كانت السرعة الابتدائية للجسيم تساوي 8 م / ث، فأوجد سرعته بعد ثانيتين.

الحل:

حـ = ن^2 – 2 ن ، ع = 8 م / ث عندما ن = 0

ع = $\int$ (ن^2 – 2 ن) ءن

ع = $\frac{ن^3}{3}$ - ن^2 + ث

8 = 0 – 0 + ث ∴ ث = 8

ع = $\frac{ن^3}{3}$ - ن^2 + 8

ع$_{ن=2}$ = $\frac{1}{3}$ × 8 – 4 + 8

ع$_{ن=2}$ = $\frac{8+12}{3}$ = $\frac{20}{3}$

ع$_{ن=2}$ = $\frac{2}{3}$ 6 م / ث

(7) يتحرك جسيم في خط مستقيم من نقطة ثابتة و حيث سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ع = (6ن^2 + 1) م / ث أوجد إزاحته من و بعد 3 ثوان.

الحل :

ف = $\int$ (6 ن^2 + 1) ءن

ف = 2 ن^3 + ن + ث ، ف = 0 عندما ن = 0

0 = 0 + ث ∴ ث = 0

ف = 2 ن^3 + ن

ف$_{ن=3}$ = 2 × 3^3 + 3 **ف = 57 م**

حل آخر:

ف = $\int_0^3$ (6 ن^2 + 1) ءن = 2 ن^3 + ن $\Big|_0^3$ = (2×27 + 3) – (2 × 0 + 0) = **57** م

(8) يتحرك جسيم في خط مستقيم وبعد ن ثانية من مروره بنقطة ثابتة و على المستقيم، تعطى سرعته ع م/ ث بالعلاقة ع = 3ن ^{2} ـ 2ن.

(أ) أوجد الزمن عندما يكون الجسيم ساكنًا لحظيًّا.

(ب) أوجد إزاحات الجسيم في هذه اللحظات.

الحل :

(أ) يكون الجسم ساكناً عندما ع = 0

3 ن ^{2} – 2 ن = 0

ن (3 ن – 2) = 0 ∴ **ن = 0** ، **ن = $\frac{2}{3}$ ث**

(ب) ف = $\int$ (3 ن^2 – 2 ن) ءن

ف = ن^3 - ن^2 + ث ، ف = 0 عندما ن = 0 عند و

∴ ث = 0

ف$_{ن=0}$ = 0

ف$_{ن=\frac{2}{3}}$ = $\frac{8}{27}$ - $\frac{4}{9}$

ف$_{ن=\frac{2}{3}}$ = $\left|\frac{8-12}{27}\right|$ = $\left|\frac{-4}{27}\right|$ = $\frac{4}{27}$

ف = **0** ، ف = **$\frac{4}{27}$** م

(9) يتحرك جسيم في خط مستقيم بسرعة ع م / ث ، ن ثانية بعد مروره بنقطة ثابتة و تعطى بالعلاقة ع = 9ن^2 ـ 2ن + 1. احسب:

(أ) إزاحته من و عندما ن = 2

(ب) المسافة التي قطعت أثناء الثانية الثانية.

الحل :

(أ) ف = $\int$ (9 ن^2 – 2 ن + 1) ءن

ف = 3 ن^3 - ن^2 + ن + ث ، ف = 0 عندما ن = 0 عند و

∴ ث = 0

ف = 3 ن^3 - ن^2 + ن

ف$_{ن=2}$ = 3 × 2 ^{3} - 2^2 + 2

ف$_{ن=2}$ = **22** م

(ب) ف$_{ن=1}$ = 3 × 1 ^{3} - 1^2 + 1

ف$_{ن=1}$ = 3

ف$_{ن=2}$ - ف$_{ن=1}$ = 22 – 3 = **19** م

(10) يمر جسيم بنقطة ثابتة و بسرعة 15 م / ث ، يتحرك على خط مستقيم بعجلة (10 ـ 4ن) م / $ث^2$ حيث ن الزمن بالثانية بعد مروره بالنقطة و. احسب :

(أ) السرعة عندما ن = 3

(ب) بعد الجسيم عن و في هذه اللحظة

الحل :

(أ)

حـ = (10 – 4 ن) م / $ث^2$

ع = $\int$ (10 – 4 ن) ءن

ع = 10 ن – 2 $ن^2$ + ث

15 = 10 × 0 – 2 × 0 + ث

∴ ث = 10

ع = 10 ن – 2 $ن^2$ + 15

$ع_{ن=3}$ = 10 × 3 – 2 × 3^2 + 15

$ع_{ن=3}$ = **27 م/ث**

(ب)

ف = $\int$ (10 ن – 2 $ن^2$ + 15) ءن

ف = 5 $ن^2$ - $\frac{2}{3}$ $ن^3$ + 15 ن + $ث_1$ ، ف = 0 عندما ن = 0 عند و

$ث_1$ = 0

ف = 5 $ن^2$ - $\frac{2}{3}$ $ن^3$ + 15 ن

$ف_{ن=3}$ = 5×3^2 - $\frac{2}{3}$ × 3^3 + 15×3

$ف_{ن=3}$ = 45 - 18 + 45

$ف_{ن=3}$ = **72 م**

(11) يتحرك جسيم في خط مستقيم بسرعة ع م/ ث، تعطى بالعلاقة ع = 9 ـ $\frac{1}{4}$ ن^2 حيث ن عدد الثواني بعد مروره بنقطة ثابتة و.

احسب :

(أ) قيمة ن عندما تساوي السرعة لحظيًّا صفرًا.

(ب) المسافة التي قطعها الجسيم في الثانية الثالثة.

الحل :

(أ)

ع = 9 - $\frac{1}{4}$ ن^2 وعندما ع = 0

0 = 9 - $\frac{1}{4}$ ن^2

$\frac{1}{4}$ ن^2 = 9

ن^2 = 36

ن = **6 ث**

(ب)

ف = $\int_2^3$ (9 – $\frac{1}{4}$ ن^2) ءن

ف = 9 ن - $\frac{1}{12}$ ن^3 $\Big|_2^3$

ف = (27 - $\frac{9}{4}$) – (18 - $\frac{8}{12}$)

= $\frac{99}{4}$ - $\frac{52}{3}$ = $\frac{208 - 297}{12}$

ف = $\frac{89}{12}$

ف = **7 $\frac{5}{12}$ م**

(12) بدأ جسيم من النقطة و الحركة على خط مستقيم بحيث سرعته ع م/ث و بعد زمن ن ثانية تتعين بالعلاقة

$ع = 3ن - ن^2$.

احسب :

(أ) المسافة التي قطعها الجسيم قبل الوقوف لحظيًا.

(ب) الزمن اللازم قبل عودة الجسيم إلى النقطة و .

الحل :

(أ)

عند الوقوف لحظياً $ع = 0$

$3ن - ن^2 = 0$

$ن(3 - ن) = 0$

$\mathbf{ن = 0}$ ، $\mathbf{ن = 3}$

$ف = \int (3ن - ن^2)\, ءن$

$ف = \frac{3}{2}ن^2 - \frac{1}{3}ن^3 + ث_1$ ف = 0 عندما ن = 0 تكون $ث_1 = 0$

$ف = \frac{3}{2}ن^2 - \frac{1}{3}ن^3$

$ف_{ن=3} = \frac{3}{2} \times 9 - \frac{1}{3} \times 27$

$= \frac{27}{2} - \frac{18}{2} = \frac{9}{2}$

$ف_{ن=3} = \mathbf{4\frac{1}{2}}$ **م**

(ب)

$ف = \frac{3}{2}ن^2 - \frac{1}{3}ن^3$

يعو دالجسم عند النقطة و أي ان المسافة $ف = 0$

$\frac{3}{2}ن^2 - \frac{1}{3}ن^3 = 0$

$ن^2(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}ن) = 0$

$ن^2 = 0 \Longleftarrow ن = 0$ ليست المطلوبة

$\frac{3}{2} - \frac{1}{3}ن = 0$

$\frac{1}{3}ن = \frac{3}{2}$

$ن = \frac{9}{2}$ أ، $\mathbf{ن = 4\frac{1}{2}}$ **ث**

تمرين 5 - 5

(1) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث إن عجلته بعد ن ثانية تساوي جـ م/ث^2 حيث جـ = 3ن^2 ـ 4ن .

إذا بدأ الجسيم حركته من السكون من نقطة ثابتة و، فأوجد الزمن اللازم حتى يقف لأول مرة لحظيًّا.

الحل:

ع = ∫ (3 ن^2 – 4 ن) ءن

ع = ن^3 – 2 ن^2 + ث   ع = 0   ،   ن = 0   ∴ ث = 0

ع = ن^3 – 2 ن^2 يسكن الجسم لحظياً عندما ع = 0

ن^3 – 2 ن^2 = 0

ن^2 (ن – 2) = 0 ⟸ ن = 0   ،   ن = 2

ن = 0 عند و

ن = 2 ثانية   يسكن عندها الجسيم لأول مره لحظياً

(2) يتحرك جسيم في خط مستقيم مارًّا بنقطة و بسرعة 12 م/ث. وعجلته جـ م/ث^2 تعطى بالعلاقة جـ = 5 ـ 4ن حيث ن ثانية هو الزمن بعد مروره بالنقطة الثابتة و أوجد صيغة للسرعة ع بالمتر في الثانية بدلالة ن.

احسب:

قيمة كل من ع، جـ عندما ن = 4 .

الحل :

ع = ∫ (5 – 4 ن) ءن

ع = 5 ن – 2 ن^2 + ث

ع = 12 م / ث   ، ن = 0   عند و   ⟸   ث = 12

ع = 5 ن – 2 ن^2 + 12

جـ$_{ن=4}$ = 5 – 4 ×4

جـ$_{ن=4}$ = 5 – 16 = **-11**

ع$_{ن=4}$ = 5 × 4 – 2 × 4 ^{2} + 12

ع$_{ن=4}$ = 20 – 32 + 12 = **0**

(3) يمر جسيم بنقطة ثابتة و بسرعة 20 م/ث ويتحرك في خط مستقيم بعجلة $\frac{1}{4}$ ن م/ث^2 حيث ن الزمن بالثواني بعد مروره بالنقطة و.

احسب :

(أ) سرعته عندما ن = 4

(ب) المسافة المقطوعة في 6 ثوان الأولى بعد مروره بالنقطة و

الحل :

(أ)

ع = $\int$ $\frac{1}{4}$ ن ءن

ع = $\frac{1}{8}$ ن^2 + ث ولكن عند و والتي فيه ن = 0 كانت ع = 20 م / ث

20 = $\frac{1}{8}$ × 0 ^{2} + ث

∴ ث = 20

ع = $\frac{1}{8}$ ن^2 + 20

ع$_{ن=4}$ = $\frac{1}{8}$ ×4 ^{2} + 20

ع$_{ن=4}$ = 22 م / ث

(ب)

ف = $\int$ ($\frac{1}{8}$ ن^2 + 20) ءن

ف = $\frac{1}{24}$ ن^3 + 20 ن + ث$_1$

عندما يمر الجسيم بـ و يكون ف = 0 ، ن = 0

∴ ث$_1$ = 0

ف = $\frac{1}{24}$ ن^3 + 20 ن

ف$_{ن=6}$ = $\frac{1}{24}$ ×6 ^{3} + 20 × 6

ف$_{ن=6}$ = **129** م

حل آخر:

ف = $\int_0^6$ ($\frac{1}{8}$ ن^2 + 20) ءن = $\frac{1}{24}$ ن^3 + 20 ن $\Big|_0^6$ = $\frac{1}{24}$ × 6^3 + 20 × 6 = 9 + 120 = **129** م

(4) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تساوي ع م/ث فحيث ع = م ن + ل $ن^3$، حيث م، ل ثابتان. بفرض أن العجلة تساوي صفرًا عند ن = 2 ، وأن المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة $2\frac{3}{4}$ متر. فأوجد قيمة كل من م، ل

الحل :

جـ = م + 3 ل $ن^2$

جـ = 0 عند ن = 2

0 = م + 3 ل × 2^2

م + 12 ل = 0 ⟵ (1)

ف = $\int_2^3$ (م ن + ل $ن^3$) ءن

ف = $\left[م \frac{ن^2}{2} + ل \frac{ن^4}{4} \right]_2^3$

ف = ($\frac{9م}{2} + \frac{81ل}{4}$) – ($\frac{4م}{2} + \frac{16ل}{4}$) وحيث أن ف = $2\frac{3}{4}$

$\frac{11}{4} = \frac{5م}{2} + \frac{65ل}{4}$ بالضرب × 4

10 م + 65 ل = 11 ⟵ (2)

بضرب (1) × 10

10 م + 120 ل = 0 ⟵ (3)

بطرح (2) من (3)

55 ل = -11

ل = $\frac{-11}{55}$ أ، ل = $\frac{-1}{5}$

من (1) م = $2\frac{2}{5}$

(5) يمر جسيم بنقطة ثابتة و ويتحرك على خط مستقيم بسرعة 17 + $\frac{1}{8}$ن^2 م/ث حيث ن الزمن بالثانية بعد مروره بالنقطة و.

احسب :

(أ) السرعة عندما تكون العجلة 2 م/ث^2.

(ب) المسافة المقطوعة في الثانية الرابعة بعد مروره بالنقطة و

الحل :

(أ)

جـ = $\frac{1}{4}$ ن   وعندما جـ = 2 م / ث

2 = $\frac{1}{4}$ ن

ن = 8 ثانية

ع$_{ن=2}$ = 17 + $\frac{1}{8}$ × 8 ^{2}

ع$_{ن=2}$ = 25 م / ث

(ب)

ف = $\int_3^4$ (17 + $\frac{1}{8}$ن^2) ءن

= $\left[17 \text{ ن} + \frac{1}{24} \text{ ن}^3 \right]_3^4$

ف = (17 × 4 + $\frac{1}{24}$ × 64) – (17 × 3 + $\frac{1}{24}$ × 27)

ف = 68 + $\frac{8}{3}$ – 51 - $\frac{9}{8}$

ف = 17 + $\frac{27-64}{24}$ = 17 + $\frac{37}{24}$

ف = $\frac{37+408}{24}$ = $\frac{445}{24}$

ف = $\frac{13}{24}$ م

(6) يتحرك جسيم على خط مستقيم ماراً بنقطة ثابتة و بسرعة 8 م / ث وعجلة - 2 م / ث^2. يتحرك بهذه الحالة حيث ن بالثانية بعد المرور بالنقطة و، وعجلة جـ م / ث^2، تتعين بالعلاقة جـ = أ + ب ن. أثناء الثانية الأولى بعد المرور بالنقطة و قطع 9 أمتار. احسب كلا من أ ، ب

الحل :

جـ = أ + ب ن ، جـ = -2

∴ أ + ب ن = -2 عند و ، ن = 0

أ = **-2** ⟵ (1)

ع = $\int$ (أ + ب ن) ءن

ع = أ ن + $\frac{1}{2}$ ب ن^2 + ث ن ع = 8 عند و ، ن = 0

∴ ث = 8

ع = أ ن + $\frac{1}{2}$ ب ن^2 + 8

ف = $\int$ (أ ن + $\frac{1}{2}$ ب ن^2 + 8) ءن

ف = $\frac{1}{2}$ أ ن^2 + $\frac{1}{6}$ ب ن^3 + 8 ن + ث$_1$ عند و ف = 0 ، ن = 0 ∴ ث$_1$ = 0

ف = $\frac{1}{2}$ أ ن^2 + $\frac{1}{6}$ ب ن^3 + 8 ن

ف = 9 عندما ن = 1

9 = $\frac{1}{2}$ أ × 1^2 + $\frac{1}{6}$ ب × 1^3 + 8 × 1 بالضرب × 6

54 = 3 أ + ب + 48

3 أ + ب = 6 ⟵ (2)

بالتعويض عن (1) في (2)

3 × -2 + ب = 6

ب = 6 + 6

ب = **12**

تكامل الدوال المثلثية :

اولاً :

1) $\int$ جا ٲ س ءس = $\frac{-1}{ٲ}$ جتا ٲ س + ث

2) $\int$ جتا ٲ س ءس = $\frac{1}{ٲ}$ جا ٲ س + ث

3) $\int$ قا^2 ٲ س ءس = $\frac{1}{ٲ}$ ظا ٲ س + ث

مثال(1):

كامل كل مما يأتي :

-1 $\int$ جا 4 س ءس = $\frac{-1}{4}$ جتا 4 س + ث حيث ث ثابت

-2 $\int$ جتا 5 س ءس = $\frac{1}{5}$ جا 5 س + ث حيث ث ثابت

-3 $\int$ قا^2 7 س ءس = $\frac{1}{7}$ ظا 7 س + ث حيث ث ثابت

مثال(2):-

أوجد قيمة كل مما يأتي :

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جا 2س ءس = - $\frac{1}{2}$ | جتا 2س | $_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

= -$\frac{1}{2}$ [جتا 2×$\frac{\pi}{2}$ – جتا 2×0] = -$\frac{1}{2}$ [-1 -1]

= - $\frac{1}{2}$ × -2 = 1

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}$ جتا 4 س ءس = $\frac{1}{4}$ | جا 4 س | $_{0}^{\frac{\pi}{8}}$

= $\frac{1}{4}$ [جا 4×$\frac{\pi}{8}$ – جا 4×0] = $\frac{1}{4}$ [1 – 0] = $\frac{1}{4}$

ثانياً :

1) $\int$ **جا(أس + ب) ءس =** $\frac{-1}{أ}$ **جتا(أس + ب) + ث**

2) $\int$ **جتا(أس + ب) ءس =** $\frac{1}{أ}$ **جا(أس + ب) + ث**

3) $\int$ **قا^2(أس + ب) ءس =** $\frac{1}{أ}$ **ظا(أس + ب) + ث**

مثال(3):-

كامل كل مما يأتي :

-1 $\int$ جا(5 س + 9) ءس = $\frac{-1}{5}$ جتا (5 س + 9) + ث   حيث ث ثابت

-2 $\int$ جتا(4 + 7س) ءس = $\frac{1}{7}$ جا (4 + 7س) + ث   حيث ث ثابت

-3 $\int$ قا^2(8 س + 3) ءس = $\frac{1}{8}$ ظا(8 س + 3) + ث   حيث ث ثابت

-4 $\int$ جا(5 - $\frac{7}{3}$ س) ءس = $\frac{3}{7}$ جتا (5 - $\frac{7}{3}$ س) + ث   حيث ث ثابت

-5 $\int$ جتا($\frac{س}{8}$ + 6) ءس = 8 جا ($\frac{س}{8}$ + 6)+ ث   حيث ث ثابت

-6 $\int$ قا^2(7 - $\frac{7}{8}$ س) ءس = $\frac{-8}{7}$ ظا(7 - $\frac{7}{8}$ س) + ث   حيث ث ثابت

تـمـرين 6 - 1

كامل كلا مما يأتي بالنسبة إلى س:

النسبة	التكامل
(أ) جتا 2 س	(أ) $\frac{1}{2}$ جا 2 س + جـ
(ب) جا 2 س	(ب) - $\frac{1}{2}$ جتا 2 س + جـ
(جـ) قا^2 5 س	(جـ) $\frac{1}{5}$ ظا 5 س + جـ
(د) جتا $\frac{1}{2}$ س	(د) 2 جا $\frac{1}{2}$ س + جـ
(هـ) جا $\frac{س}{3}$	(هـ) - 3 جتا $\frac{1}{3}$ س + جـ
(و) - جا 5 س	(و) $\frac{1}{5}$ جتا 5 س + جـ
(ز) 3 جتا 3 س	(ز) جا 3 س + جـ
(ح) - 2 جا س	(ح) 2 جتا س + جـ
(ط) - جتا $\frac{2}{3}$ س	(ط) - $\frac{3}{2}$ جا $\frac{2}{3}$ س + جـ
(ي) جتا (1+ س)	(ي) جا (1 + س) + جـ
(ك) جتا (2 س - 5)	(ك) $\frac{1}{2}$ جا (2 س – 5) + جـ
(ل) جا (س + 5)	(ل) - جتا (س + 5) + جـ
(م) قا^2 (2 س + 3)	(م) $\frac{1}{2}$ ظا (2 س + 3) + جـ
(ن) 4 جتا (س - 1)	(ن) 4 جا (س – 1) + جـ
(س) 3 جا (1 - 3 س)	(س) جتا (1 – 3 س) + جـ
(ع) 3 جا (6 س+ 1)	(ع) - $\frac{1}{2}$ جتا (6 س + 1) + جـ
(ف) $\frac{3}{4}$ جتا (1 - 4 س)	(ف) - $\frac{3}{16}$ جا (1 – 4 س) + جـ
(ص) - 2 جا (1 + س)	(ص) 2 جتا (1 + س) + جـ

احسب التكاملات المحدودة الآتية:

(أ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا س ءس}$ $= \Big[\text{جا س}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \text{جا}\,\frac{\pi}{2} - \text{جا}\,0$

$= 1 - 0 = 1$

(ب) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا س ءس}$

$= \Big[\text{جا س}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \text{جا}\,\frac{\pi}{2} - \text{جا}\,(-\frac{\pi}{2})$

$= 1 - (-1) = 2$

(جـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا س ءس}$ $= \Big[-\text{جتا س}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -(\text{جتا}\,\pi - \text{جتا}\,0)$

$= -(0 - 1) = 1$

(د) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{جا س ءس}$

$= \Big[-\text{جتا س}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= -(\text{جتا}\,\pi - \text{جتا}\,\frac{\pi}{2})$

$= -(-1 - 0) = 1$

(هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س ءس}$ $= \Big[\text{ظا س}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= (\text{ظا}\,\frac{\pi}{4} - \text{ظا}\,0)$

$= 1 - 0 = 1$

(و) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جا 2 س ءس

$= \left| -\frac{1}{2} \right.$ جتا 2 س $\left. \right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{2}$ (جتا 2 × $\frac{\pi}{2}$ – جتا 2 × 0)

$= -\frac{1}{2}$ (- 1 – 1) = 1

(ز) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا 3 س ءس

$= \left| \frac{1}{3} \right.$ جا 3 س $\left. \right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{3}$ (جا $\frac{3}{2}$ π – جا π)

$= \frac{1}{3}$ (- 1 – 0) = $-\frac{1}{3}$

(ح) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$ 2 قا² $\frac{1}{2}$ س ءس

$= \left| 4 \right.$ ظا $\frac{1}{2}$ س $\left. \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$

= 4 (ظا $\frac{1}{2}$ × $\frac{3\pi}{2}$ – ظا $\frac{1}{2}$ × $\frac{\pi}{2}$)

= 4 (- 1 – 1) = - 8

(ط) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}$ 3 جتا 2 س ءس

$= \left| \frac{3}{2} \right.$ جا 2 س $\left. \right|_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{3}{2}$ (جا 2 × $\frac{\pi}{3}$ – جا 2 × 0)

$= \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

تمرين 6 - 2

احسب التكاملات المحدودة الآتية:

(أ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ (جتا س + 1) ءس $= \Big|$ جا س + س $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

= (جا $\frac{\pi}{2}$ + $\frac{\pi}{2}$) – (جا 0 + 0)

= 1 + $\frac{\pi}{2}$

(ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ (س - جا س) ءس $= \Big|$ $\frac{س^2}{2}$ + جتا س $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

= ($\frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2}$ + جتا $\frac{\pi}{2}$) – ($\frac{0}{2}$ + جتا 0)

= $\frac{\pi^2}{8}$ – 1

(جـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ (1 + ظا^{2}س) ءس = $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ قا^{2}س ءس

= $\Big|$ ظا س $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

= ظا $\frac{\pi}{4}$ – ظا 0

= 1 – 0 = 1

(د) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتا 2 س ءس = $\Big|$ $\frac{1}{2}$ جا 2 س $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

= $\frac{1}{2}$ (جا 2 × $\frac{\pi}{4}$ – جا 2 × 0)

= $\frac{1}{2}$ × 1 = $\frac{1}{2}$

(هـ) $\int_{0}^{\pi}$ جا س ءس = $\Big|$ – جتا س $\Big|_{0}^{\pi}$

= - (جتا π – جتا 0)

= - (- 1 – 1) = 2

(و) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ جتا س ءس

= $\Big|$ جا س $\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

= (جا $\frac{\pi}{4}$ – جا (- $\frac{\pi}{4}$)) = ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ - (- $\frac{1}{\sqrt{2}}$)) = $\frac{2}{\sqrt{2}}$ = $\sqrt{2}$

تمرين 6 - 3

(1)
أوجد $\frac{ء}{ءس}$ $(\frac{1}{2}$ جا^{2}س$)$ ، من ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\frac{1}{3}$ جا س جتا س$)$ ءس

الحل :

$\frac{ء}{ءس}$ ($\frac{1}{2}$ جا^2 س) = جا س جتا س

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}$ ($\frac{1}{3}$ جا س جتا س) ءس = $\left| \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right.$ جا^2 س $\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$

= $\frac{1}{6}$ (جا^2 $\frac{\pi}{6}$ - جا^2 0)

= $\frac{1}{6}$ ($\frac{1}{4}$ – 0) = $\frac{1}{24}$

(2)
بوضع جا^{2}س بدلالة جتا 2 س ، أوجد التكامل غير المحدود للدالة جا^2 س

الحل :

$\int$ جا^{2}س ءس = $\int \frac{1}{2}$ (1 – جتا 2 س) ءس

= $\frac{1}{2}$ (س - $\frac{1}{2}$ جا 2 س) + ث

(3)
احسب $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 +$ ظا^{2}س$)$ ءس

الحل :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ (1 + ظا^2 س) ءس = $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ قا^2 س ءس

= $\Big|$ ظا س $\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

= ظا $\frac{\pi}{3}$ – ظا $\frac{\pi}{4}$ = $\sqrt{3}$ - 1

(4) إذا كان $\frac{ء}{ءس}$ (ظا س) = قا^{2}س، فاضل ظا^{3}س بالنسبة إلى س

اثبت أن ظا^{4}س = ظا^{2}س قا^{2}س ـ قا^2 س + 1 ومن ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ ظا^{4}س ءس

الحل :

$\frac{ء}{ءس}$ ظا^3 س = 3 ظا^2 س قا^2 س

ظا^4 س = ظا^2 س ظا^2 س

= ظا^2 س (قا^2 س – 1)

= ظا^2 س قا^2 س - ظا^2 س

= ظا^2 س قا^2 س – (قا^2 س – 1)

= ظا^2 س قا^2 س – قا^2 س + 1

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ ظا^4 س ءس = $\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ (ظا^2 س قا^2 س – قا^2 س + 1) ءس

= $\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ (ظا^2 س قا^2 س) ءس – $\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ قا^2 س ءس + $\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ ءس

= $\frac{1}{3}$ |ظا^{3}س |$_0^{\frac{\pi}{4}}$ – |ظا س |$_0^{\frac{\pi}{4}}$ + | س |$_0^{\frac{\pi}{4}}$

= $\frac{1}{3}$ - 1 + $\frac{\pi}{4}$

= $\frac{\pi}{4}$ - $\frac{2}{3}$

تكامل الدوال الآسية واللوغاريتمية :-

اولاً : تكامل الصورة $\int \frac{1}{أ\,س}\,ءس = \frac{1}{أ}\,لوس + ث$

مثال(1):-

كامل كل مما يأتي بالنسبة لـــ س

-1 $\int \frac{1}{س}\,ءس = لوس + جـ$

-2 $\int \frac{س^{-1}}{5}\,ءس = \frac{1}{5}\,لوس + جـ$

-3 $\int \frac{4}{س}\,ءس = 4\,لوس + جـ$

-4 $\int \frac{-7}{8\,س}\,ءس = \frac{-7}{8}\,لوس + جـ$

-5 $\int \frac{-7}{س}\,ءس = -7\,لوس + جـ$

تمرين 7–1

كامل الآتي بالنسبة إلى س:

الدالة	تكاملها
(أ) $\frac{2}{س}$	(أ) $2\,لوس + جـ$
(ب) $\frac{1}{3\,س}$	(ب) $\frac{1}{3}\,لو\,س + جـ$
(جـ) $2 - \frac{1}{س}$	(جـ) $2\,س - لو\,س + جـ$
(د) $س^2 - \frac{1}{(س + 1)}$	(د) $\frac{س^3}{3} - لو\,(\,س + 1\,) + جـ$

ثانياَ: تكامل الصورة $\int \frac{1}{\text{أ س+ب}}\,\text{ءس} = \int (\text{أ س + ب})^{-1}\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{\text{أ}}\,\text{لو}(\text{أ س + ب}) + \text{ث}$

مثال(2):-

كامل كل مما يأتي بالنسبة لـــــ س

-1 $\int (3\text{س} + 4)^{-1}\,\text{ءس} = \frac{1}{3}\,\text{لو}(3\text{س} + 4) + \text{ث}$

-2 $\int \frac{1}{2\text{س}+5}\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\,\text{لو}(2\text{س} + 5) + \text{ث}$

-3 $\int \left(\frac{2\text{س}}{5} - 9\right)^{-1}\,\text{ءس} = \frac{5}{2}\,\text{لو}\left(\frac{2\text{س}}{5} - 9\right) + \text{ث}$

-4 $\int \frac{1}{6-8\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{-1}{8}\,\text{لو}(6 - 8\text{س}) + \text{ث}$

-5 $\int \left(9 - \frac{\text{س}}{4}\right)^{-1}\,\text{ءس} = -4\,\text{لو}\left(9 - \frac{\text{س}}{4}\right) + \text{ث}$

تمرين 7 - 1

كامل:

(أ) $\int \frac{1}{(1 - \text{س})}\,\text{ءس} = -\,\text{لو}\,(1 - \text{س}) + \text{جـ}$

(ب) $\int \frac{2}{(3\text{س} - 1)}\,\text{ءس} = \frac{2}{3}\,\text{لو}\,(3\text{س} - 1) + \text{جـ}$

(جـ) $\int \frac{3}{4(\text{س} - 1)}\,\text{ءس} = \frac{3}{4}\,\text{لو}\,(\text{س} - 1) + \text{جـ}$

(د) $\int \frac{2}{(2\text{س} + 3)}\,\text{ءس} = \text{لو}\,(2\text{س} + 3) + \text{جـ}$

(هـ) $\int \frac{5}{(1 - 5\text{س})}\,\text{ءس} = -\,\text{لو}\,(1 - 5\text{س}) + \text{جـ}$

(و) $\int (3\text{س} + 1)^{-1}\,\text{ءس} = \frac{1}{3}\,\text{لو}\,(3\text{س} + 1) + \text{جـ}$

(2)

أوجد قيمة:

(أ) $\int_{1}^{2} \frac{1}{3\text{س}}\,ء\text{س}$

$= \left[\frac{1}{3}\ \text{لو س}\right]_{1}^{2}$

$= \frac{1}{3}\left(\text{لو } 2 - \text{لو } 1\right)$

$= \frac{1}{3}\left(0.69 - 0\right) \approx 0.231$

(ب) $\int_{1}^{2} \left(1 - \frac{1}{2\text{س}}\right)ء\text{س}$

$= \left[\text{س} - \frac{1}{2}\text{لو س}\right]_{1}^{2}$

$= \left(2 - \frac{1}{2}\text{لو } 2\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \times \text{لو } 1\right)$

$= 1.653 - 1 \approx 0.653$

(جـ) $\int_{2}^{3} \frac{3}{(1+\text{س})}\,ء\text{س}$

$= \left[3\ \text{لو}\ (1 + \text{س})\right]_{2}^{3}$

$= 3\left(\text{لو } 4 - \text{لو } 3\right)$

$= 3\ \text{لو}\ \frac{4}{3} \approx 0.863$

(د) $\int_{0}^{1} (1 + 2\text{س})^{-1}\,ء\text{س}$

$= \left[\frac{1}{2}\ \text{لو}\ (1 + 2\text{س})\right]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{لو } 3 - \text{لو } 1\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1.0986 - 0\right) \approx 0.549$

(هـ) $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{(2 - 3\text{س})}\,ء\text{س}$

$= -\frac{2}{3}\left[\text{لو}\ (2 - 3\text{س})\right]_{-2}^{-1}$

$= -\frac{2}{3}\left(\text{لو } 5 - \text{لو } 8\right)$

$= -\frac{2}{3}\text{لو}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 0.313$

(و) $\int_{1}^{2} \frac{2}{3\,(2\text{س} - 1)}\,ء\text{س}$

$= \left[\frac{1}{3}\ \text{لو}\ (2\text{س} - 1)\right]_{1}^{2}$

$= \frac{1}{3}\left(\text{لو } 3 - \text{لو } 1\right)$

$= \frac{1}{3}\left(1.0986 - 0\right) \approx 0.366$

تمرين 7 - 2

(1)

أوجد الآتي:

(أ) $\int \frac{4}{5(س-1)}$ ءس

= $\frac{4}{5}$ لو (س – 1) + جـ

(ب) $\int \frac{3}{4(1-س)}$ ءس

= $\frac{3}{4}$ لو (1 – س) + جـ

(جـ) $\int (1 - \frac{1}{س})^2$ ءس

= $\int$ (1 - 2 $\frac{1}{س}$ + $\frac{1}{س^2}$) ءس

= س – 2 لو س - $\frac{1}{س}$ + جـ

(2)

أوجد قيمة:

(أ) $\int_{-1}^{-2} (1-س)^{-1}$ ءس

= $\Big|$ – لو(1 – س) $\Big|_{-1}^{-2}$

= - (لو 3 – لو 2)

= - لو ($\frac{3}{2}$) = - 0.405

(ب) $\int_{2}^{3} \frac{2}{3(س-1)}$ ءس

= $\Big|$ $\frac{2}{3}$ لو (س – 1) $\Big|_{2}^{3}$

= $\frac{2}{3}$ (لو 2 – لو 1)

= $\frac{2}{3}$ لو 2 ≈ 0.462

(جـ) $\int_{-1}^{0} \frac{ءس}{(1-3س)}$

= $\Big|$ $\frac{-1}{3}$ لو (1 – 3 س) $\Big|_{-1}^{0}$

= $\frac{-1}{3}$ (لو 1 – لو 4)

= $\frac{1}{3}$ لو 4 ≈ 0.462

(3)

فاضل 2 س لو س بالنسبة إلى س، ثم

استنتج $\int$ لو س ءس

الحل :

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(2\,\text{س لو س}) = 2\left(\text{س} \cdot \frac{1}{\text{س}} + \text{لو س}\right)$

$= 2\,(1 + \text{لو س})$

بالمثل

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س لو س}) = (1 + \text{لو س})$

$\int \text{لو س ءس} = \int (-1 + 1 + \text{لو س})\,\text{ءس}$

$= \int -\,\text{ءس} + \int (1 + \text{لوس})\,\text{ءس}$

$= -\,\text{س} + \text{س لو س} + \text{جـ}$

(4)

فاضل لو $\{\text{س} + \sqrt{(\text{س}^2 + 1)}\}$ بالنسبة إلى س ثم

استنتج $\int_0^1 \frac{\text{ءس}}{\sqrt{(\text{س}^2 + 1)}}$

الحل :

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,\text{لو}\left(\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + 1}\right) = \frac{1 + \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{\text{س}^2 + 1} + \text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + 1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}$

$\int_0^1 \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}} = \left[\text{لو}\left(\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + 1}\right)\right]_0^1$

$= \text{لو}\,(1 + \sqrt{2}) - \text{لو}\,(0 + 1)$

$= \text{لو}\,(1 + \sqrt{2}) \approx 0.881$

ثالثاً: تكامل الصورة $\int$ هـ$^{أس+ب}$ ءس = $\frac{1}{أ}$ هـ$^{أس+ب}$ + ث **"حيث العدد هـ = 2.718"**

مثال(1):-

كامل كل مما يأتي بالنسبة لـــ س

1- $\int$ هـ^{3س} ءس = $\frac{1}{3}$ هـ^{3س} + ث

2- $\int$ هـ$^{-5س}$ ءس = $\frac{-1}{5}$ هـ$^{-5س}$ + ث

3- $\int$ هـ$^{\frac{3}{4}س}$ ءس = $\frac{4}{3}$ هـ$^{\frac{3}{4}س}$ + ث

4- $\int$ هـ$^{\frac{-7}{5}س}$ ءس = $\frac{-5}{7}$ هـ$^{\frac{-7}{5}س}$ + ث

5- $\int$ هـ$^{2س+1}$ ءس = $\frac{1}{2}$ هـ$^{2س+1}$ + ث

مثال(2):-

احسب قيمة كل مما يأتي :

1- $\int_{1}^{2}$ هـ^{2س} ءس $\frac{1}{2}$ [هـ^{2س}]$_{1}^{2}$ = $\frac{1}{2}$ [هـ$^{2\times2}$ - هـ$^{2\times1}$]

= $\frac{1}{2}$ [هـ^{4} - هـ^{2}]

2- $\int_{0}^{5}$ هـ$^{\frac{3}{5}س+1}$ ءس = $\frac{5}{3}$ [هـ$^{\frac{3}{5}س+1}$]$_{0}^{5}$

= $\frac{5}{3}$ [هـ$^{\frac{3}{5}\times5+1}$ - هـ$^{\frac{3}{5}\times0+1}$]

= $\frac{5}{3}$ [هـ^{4} - هـ]

تمرين 7 - 3

(1) كامل الآتي بالنسبة إلى س :

الدالة	التكامل
(أ) $2\,\text{هـ}^{\text{س}}$	(أ) $2\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$
(ب) $\text{هـ}^{\frac{1}{2}\text{س}}$	(ب) $2\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$
(جـ) $\text{هـ}^{2\text{س}+1}$	(جـ) $\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{2\text{س}+1} + \text{جـ}$
(د) $\text{هـ}^{-3\text{س}}$	(د) $-\frac{1}{3}\,\text{هـ}^{-3\text{س}} + \text{جـ}$
(هـ) $\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{1-\text{س}}$	(هـ) $\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{2\text{س}} - \text{هـ}^{1-\text{س}} + \text{جـ}$
(و) $\left(\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}}\right)^2$ $= \text{هـ}^{2\text{س}} + 2 + \text{هـ}^{-2\text{س}}$	(و) $\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{2\text{س}} + 2\text{س} - \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{-2\text{س}}$ $= 2\text{س} + \frac{1}{2}\left(\text{هـ}^{2\text{س}} - \text{هـ}^{-2\text{س}}\right) + \text{جـ}$

(2) احسب (الإجابة):

(أ) $\int_0^1 \text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{ءس}$

$$= \left[\frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{هـ}^{2} - 1\right)$$

(ب) $\int_0^2 \text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{س}}\,\text{ءس}$

$$= -2\left[\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{س}}\right]_0^2$$

$$= -2\left(\text{هـ}^{-1} - 1\right) = 2 - 2\,\text{هـ}^{-1}$$

(جـ) $\int_0^{\frac{1}{3}} \left(3 - \frac{\text{هـ}^{-3\text{س}}}{2}\right)\text{ءس}$

$$= \left[3\text{س} + \frac{\text{هـ}^{-3\text{س}}}{6}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(3 \times \frac{1}{3} + \frac{\text{هـ}^{-3\times\frac{1}{3}}}{6}\right) - \left(3 \times 0 + \frac{\text{هـ}^{-3\times 0}}{6}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\text{هـ}^{-1}}{6}\right) - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(6 + \text{هـ}^{-1} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\text{هـ}^{-1} + 5\right)$$

تمرين

أوجد د (س) إذا علم أن:

(أ) د َ (س) = $\frac{هـ^{2س} - هـ^{-س}}{هـ^{س}}$

الحل :

$د'(س) = هـ^{س} - هـ^{-2س}$

$د(س) = هـ^{س} + \frac{1}{2} هـ^{-2س} + جـ$

(ب) د َ (س) = $(هـ^{2س} - هـ^{-س})^2$

الحل :

$د'(س) = هـ^{4س} - 2 هـ^{س} + هـ^{-2س}$

$د(س) = \frac{1}{4} هـ^{4س} - \frac{1}{2} هـ^{-2س} - 2 هـ^{س} + جـ$

(جـ) د َ (س) = $(س - \frac{1}{س})^2 - هـ^{-6س}$

الحل :

$د'(س) = س^2 - 2 + \frac{1}{س^2} - هـ^{-6س}$

$د(س) = \frac{س^3}{3} - 2س - \frac{1}{س} + \frac{1}{6} هـ^{-6س} + جـ$

(د) د َ (س) = جا 2 س + $هـ^{2س - 1}$

الحل :

$د(س) = -\frac{1}{2}$ جتا 2 س $+ \frac{1}{2} هـ^{2س-1} + جـ$

المصفوفات Matrices

المصفوفة :-

هي أداة رياضية تستخدم للتعبير عن البيانات بطريقة منسقة ويستخدم لها احدى الأقواس [ ] أ، ( )

وتعتبر المصفوفات من الدعامات الأساسية في دراسة البرامج الخطية

فمثلا $\begin{bmatrix} ج & ب & أ \\ ع & ص & س \end{bmatrix}$ ← الصف الأول ، ← الصف الثاني

↓ العمود الثالث ↓ العمود الثاني ↓ العمود الأول

الصورة العامة للمصفوفة :

$$ف = \begin{bmatrix} أ_{1ن} & \cdots\cdots & أ_{21} & أ_{11} \\ أ_{2ن} & \cdots\cdots & أ_{22} & أ_{12} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ أ_{من} & \cdots\cdots & أ_{م2} & أ_{م1} \end{bmatrix}$$

$أ_{21}$: الصف الأول العمود الثاني $أ_{53}$: الصف الثالث العمود الخامس

مثال :

المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$أ_{11} = 1$ ، $أ_{13} = 5$ ، $أ_{32} = 2$ ، $أ_{31} = 6$

رتبة المصفوفة أو نوع المصفوفة :-

تعرف رتبة المصفوفة عن طريق ضرب عدد الصفوف في عدد الأعمدة

فمثلاً

$\begin{bmatrix} 5 & 1- & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1- & 2 \end{bmatrix}$ من نوع 3×3 $\begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$ من نوع 1×1 $\begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ من نوع 2×2 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ من نوع 1×4 $\begin{bmatrix} 10 & 1- & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ من نوع

تمرين :

أوجد رتبة المصفوفة [أ ب جـ ء]

المفاهيم الأساسية :-

1 – المصفوفة الحقيقية (Real Matrix) :

هي مصفوفة عناصر ها أعداداً حقيقية .

2 – المصفوفة المربعة (Square Matrix) :

يقال عن المصفوفة بأنها مربعة إذا كان بها عدد الصفوف مساوياً لعدد الأعمدة

$\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة لأن عدد صفوفها = عدد أعمدتها = 2

$\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&3&2\\4&5&0\end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من نوع 3×3

القطر الرئيسي القطر الفرعي

للمصفوفة المربعة قطران أحدهما رئيسي والآخر فرعي .

3 – مصفوفة الصف :

إذا كانت المصفوفة تحتوي صف واحد وعدد من الأعمدة م = 1

مثل : $\begin{bmatrix}5&-3&1&2\end{bmatrix}$ من نوع 1 × 4

الصيغة العامة لها: ف$_1$ = [أ$_{ري}$] (حيث: ر = 1 ، ي = 1، 2، ... ، ن)

4 – مصفوفة عمود :

إذا كانت المصفوفة تحتوي عمود واحد وعدد من الصفوف ن = 1

مثل : $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ من نوع 4 × 1

الصيغة العامة لها: ف = [أ$_{ري}$] (حيث: ر = 1 ، 2، ... ، ي = 1)

5 – المصفوفة ليس لها قيمة عددية ولكنها مجرد طريقة لعرض البيانات .

6 – المصفوفة الصفرية (Zero Matrix) :

هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار وهى المصفوفة المحايدة في عملية الجمع

مثل : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **نوع 3×2** ، أ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **نوع 2×3** ، أ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **نوع 3×3** ، أ $[0]$ **نوع 1×1**

الصيغة العامة لها: $\underline{0} = [\,أ_{ر ي}\,]$ **حيث:** $\underline{0} = \begin{cases} 0 & \text{عندما } ر = ي \\ 0 & \text{عندما } ر \neq ي \end{cases}$

7 – المصفوفة القطرية (Diagnoal Matrix) :

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي .

فمثلاً

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي 1 ، - 3 ، 5 وباقي العناصر أصفار.

أي ان :

ف = $[\,أ_{ر ي}\,]_{ن \times ن}$ تسمى مصفوفة قطرية إذا كان $أ_{ر ي} = 0$ لما $ر \neq ي$

مثال :

إذا كانت $\begin{bmatrix} 20 - 2س & 7 \\ 15 & 3 - 6ص \end{bmatrix}$ مصفوفه قطرية أوجد س + 2 ص

الحل :

$\because 20 - 2س = 0 \leftarrow س = 10$

$,\ 3 - 6ص = 0 \leftarrow ص = \frac{1}{2}$

$\therefore س + 2ص = 10 + 2 \times \frac{1}{2} = 11$

8 – مصفوفة الوحدة (Identity Matrix) :

هي مصفوفة قطرية يكون فيها جميع عناصر القطر الرئيسي 1 وهى المصفوفة المحايدة في عملية الضرب

ويرمز لها بالرمز I والصيغة العامة لها :

الصيغة العامة لها: I = [أ ر ى] **حيث:** I = { 1 عندما ر = ى ، 0 عندما ر ≠ ى }

فمثلاً

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

مصفوفة الوحدة حيث عناصر القطر الرئيسي الواحد وباقي العناصر أصفار

9 – تساوي مصفوفتين (Equality of Matrices) :

تتساوي المصفوفتان إذا كانتا من نفس الرتبة وعناصرها المتناظرة متساوية فمثلاً

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ لأنها ليست من نفس النوع

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ لأن العناصر المتناظرة غير متساوية

(3) $\begin{bmatrix} (3)^2 - 1 & (5)^3 \\ 7 & (-6)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 125 \\ 7 & 36 \end{bmatrix}$ من نفس النوع والعناصر المتناظرة متساوية

مثال (1) :

أوجد س ، ص ، ع ، ل التي تجعل : $\begin{bmatrix} ص & 4 \\ 5 & 2ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3ع & ص + 1 \\ س + 1 & -6 \end{bmatrix}$

الحل :

س + 1 = 5 ⟵ **س = 4**   ص + 1 = 4 ⟵ **ص = 3**

ص = 3 ع ⟵ (حيث ص = 3) **ع = 1**   2 ل = - 6 ⟵ **ل = -3**

س = 4 ، ص = 3 ، ع = 1 ، ل = - 3

مثال (2) :

إذا كانت $\begin{bmatrix} س & 4 \\ ص & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & ع \end{bmatrix}$ **فبين نوع المصفوفة** $\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & 0 \end{bmatrix}$

الحل :

$\begin{bmatrix} س & 4 \\ ص & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & ع \end{bmatrix}$

وعليه س = 0

ص = 3

ع = -1

وبذلك $\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ وهي مصفوفة قطرية

10 – المصفوفة المثلثية العلوية (Upper Triangular Matrix):

هي مصفوفة مربعة بها مثلث صفري أسفل القطر الرئيسي مثل :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسى

11– المصفوفة المثلثية السفلية (Lower Triangular Matrix):

هي مصفوفة مربعة بها مثلث صفري أعلى القطر الرئيسي مثل :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسى

العمليات على المصفوفات :-

جمع وطرح المصفوفات :-

يشترط لجمع أو طرح أي مصفوفتين أن تكونا من نفس النوع حيث تجمع أو تطرح العناصر المتناظرة .

فمثلاً $\begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ -8 & 0 & 7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 1 & -10\\ 9 & 10 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 0 & -7\\ 1 & 10 & 2\end{bmatrix}$

$3+(-10) = -7$ ، $(-1)+1 = 0$ ، $5 + 3 = 8$

$7+(-5) = 2$ ، $0 + 10 = 10$ ، $(-8) + 9 = 1$

المعكوس الجمعي للمصفوفات :-

المعكوس الجمعي للمصفوفة هو تغير إشارات جميع عناصر هذه المصفوفة

فمثلاً : المعكوس الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

أي أن :

إذا كان أ ، ب مصفوفتان معرفة عليهما عملية الجمع وكان أ + ب = صفر
فإن ب تسمى المعكوس الجمعي للمصفوفة أ حيث ب = -أ

مثال :

إذا كانت س + $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة س

الحل :

س = $\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}$

س = $\begin{bmatrix}2 & -2\\ -6 & 3\end{bmatrix}$

" بإضافة معكوس المصفوفة للطرفين وهي - $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ "

" لاحظ ان س + $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ = س "

س + $\underline{0}$ = س

ملاحظة :

عملية جمع المصفوفات عملية تبديليه وتنسيقيه .

عملية ضرب المصفوفات :

(i) ضرب عدد حقيقي في مصفوفة:

عند ضرب أي مصفوفة في عدد حقيقي نضرب جميع عناصر المصفوفة في ذلك العدد .

مثال :

(1) $$\begin{bmatrix} 3- & 6 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} 3$$

(2) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2- \end{bmatrix}$ أوجد 3 أ ، $\frac{1}{2}$ م

الحل :

$$\begin{bmatrix} 18 & 24 & 3 \\ 6 & 3 & 12 \\ 3 & 6 & 6- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2- \end{bmatrix} 3 = \text{أ } 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2- \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \text{أ } \frac{1}{2}$$

(ii) <u>ضرب مصفوفتين :-</u>

الشرط اللازم لضرب مصفوفتين هو **عدد أعمدة المصفوفة اليمني = عدد صفوف المصفوفة اليسرى** .

فمثلاً : إذا ضربت مصفوفة من نوع **م** × **ن** في مصفوفة من نوع **ن** × هـ فشرط الضرب محقق وهو **ن** = **ن**
والمصفوفة الناتجة من نوع **م** × هـ

مثال (1) :-

أوجد حاصل ضرب $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2- & 1- & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 1- & 2 \\ 4- & 3 & 0 \\ 0 & 2- & 1 \end{bmatrix}$

الحل :-

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2- & 1- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1- & 2 \\ 4- & 3 & 0 \\ 0 & 2- & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times5+(4-)\times3+5\times2 & (2-)\times5+3\times3+(1-)\times2 & 1\times5+0\times3+2\times2 \\ 0\times(2-)+(4-)\times(1-)+5\times0 & (2-)\times(2-)+3\times(1-)+(1-)\times0 & 1\times(2-)+0\times(1-)+2\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2- & 3- & 9 \\ 4 & 1 & 2- \end{bmatrix}$$

مثال (2):-

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ أوجد كلا من أ × ب ، ب × أ

الحل:-

أ × ب = $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب × أ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [8]$

مثال (3) :-

إذا كان $\begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد قيمتى أ ، ب

الحل:

$\begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4أ & 3أ \\ 4ب & 3ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

∴ 4 أ = -4   أ = -1

∴ 4 ب = 4   ب = 1

مثال (4) :-

إذا كان س $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ أوجد س ، ص

الحل:

$\begin{bmatrix} 3س \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ص \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3س + ص \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

من تساوي المصفوفتين نجد أن: ص = 0   ∴ 3 س + ص = 1

3 س + 0 = 1 ⇐ س = $\frac{1}{3}$

<u>تمرين :</u>

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ وكانت أ جـ = 3 ب

فأوجد قيمة ($\frac{ص}{س} - \frac{س}{ص}$)

المحايد الضربي :-

هو مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي **واحد** وباقي عناصرها أصفار

فمثلاً

$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ مصفوفة محايدة من الرتبة الثانية ويرمز لها بالرمز I_2

$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ مصفوفة محايدة من الرتبة الثالثة ويرمز لها بالرمز I_3

ملاحظة :

عملية ضرب المصفوفات عملية غير تبديليه ولكنها تنسيقيه .

أي ان ٲ ب ≠ ب ٲ   ولكن   (ٲ ب) جـ = ٲ (ب جـ)

مسألة (1) :

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النوع ... فأشرح لماذا ؟

(i) (أ + ب)^2 ≠ أ^2 + 2 أ ب + ب^2

الإثبات :

(أ + ب)^2 = أ^2 + أ ب + ب أ + ب^2

ولكن أ ب ≠ ب أ

∴ (أ + ب)^2 ≠ أ^2 + 2 أ ب + ب^2

(ii) (أ + ب)(أ – ب) ≠ أ^2 - ب^2

الإثبات :

(أ + ب)(أ – ب) = أ^2 - أ ب + ب أ - ب^2

ولكن أ ب ≠ ب أ

∴ (أ + ب)(أ – ب) ≠ أ^2 - ب^2

(iii) (أ ب)^2 = أ^2 ب^2 ⟺ أ ب = ب أ

الإثبات :

(أ ب)^2 = (أ ب)(أ ب)

= أ (ب أ) ب   خاصية التنسيق

= أ (أ ب) ب لان أ ب = ب أ

= (أ أ) (ب ب) خاصية التنسيق

(أ ب)^2 = أ^2 ب^2 ⟺ أ ب = ب أ

تمرين :

(1) إذا كان أ ب = $\underline{0}$ فإن أ = $\underline{0}$ ، ب = $\underline{0}$

هل هذه العبارة صحيحة ام لا

(2) إذا كانت ٲ = $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ فأثبت أن

ٲ^{ن} = $2^{ن-1}$ ٲ حيث ن عدد صحيح موجب

تمرين 1-ب

(1) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

فأوجد المصفوفة في صورتها العامة بحيث أن: س أ = أ س ثم أذكر بعض المصفوفات التي تحقق هذه المعادلة.

الحل :

نفرض أن س = $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{جـ} \end{bmatrix}$ وحيث أن س أ = أ س

∴ $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{جـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{جـ} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3\text{ب} & 3\text{أ} \\ \text{ب} + \text{ء} & \text{أ} + \text{جـ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب} & 3\text{أ} + \text{ب} \\ \text{ء} & 3\text{جـ} + \text{ء} \end{bmatrix}$

3أ + ب = 3أ ⟵ ب = 0

3 جـ + ء = أ + جـ ⟵ أ = 2 جـ + ء

∴ س = $\begin{bmatrix} 0 & 2\text{جـ} + \text{ء} \\ \text{ء} & \text{جـ} \end{bmatrix}$

افرض ان جـ = 1 ، ء = - 3

س = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(2) حل المعادلة 3 (س - $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$) = 2 س + $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

الحل :

3 س - 3 $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ = 2 س + $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3 س - $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$ = 2 س + $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3 س - 2 س = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$

س = $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$

3- أوجد حاصل ضرب المصفوفات الأتية:

(أ)- $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$

(ب)- $\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2- & 1\\6 & 3-\end{bmatrix}$

(جـ)- $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\1- & 2- & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 1\end{bmatrix}$

(ء)- $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

(هـ)- $\begin{bmatrix}3- & 2\\1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\5- & 6 & 2\end{bmatrix}$

الحل :

(أ) $[\mathbf{3}\times\mathbf{1}+\ \mathbf{2}\times\mathbf{0}] = \begin{bmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{bmatrix}[\mathbf{1}\quad \mathbf{0}]$

$[\mathbf{3}] =$

(ب) $\begin{bmatrix}8-3 & 2-2\\24+9- & 6+6-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2- & 1\\6 & 3-\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}5- & 0\\15 & 0\end{bmatrix} =$

(جـ) $\begin{bmatrix}2-12 & 4-8 & 0+4\\3-3 & 6-2 & 0+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\1- & 2- & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}10 & 4 & 4\\0 & 4- & 1\end{bmatrix} =$

(ء) $[\mathbf{3}\times\mathbf{3}+\ \mathbf{2}\times\mathbf{2}+\mathbf{1}\times\mathbf{1}] = \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{bmatrix}[\mathbf{3}\quad \mathbf{2}\quad \mathbf{1}]$

$[\mathbf{14}] =$

(هـ) **لايمكن الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى ≠ عدد صفوف المصفوفة الثانية** $\begin{bmatrix}3- & 2\\1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\5- & 6 & 2\end{bmatrix}$

4- إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$

أوجد أ + ب ، أ - ب ثم أثبت أن (مع ذكر السبب.) :

(i). (أ + ب) (أ - ب) ≠ $أ^2$ - $ب^2$ (ii). $(أ + ب)^2$ ≠ $أ^2$ + 2 أب + $ب^2$

(iii). $(أب - ب أ)^2$ مصفوفة قطرية ثم أوجد قيمة $|(أب - ب أ)^2|$

الحل :

أ + ب = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$

أ − ب = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$

(i) (أ + ب) (أ − ب) = $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87 & -31 \\ -78 & 46 \end{bmatrix}$ ⟵ (1)

$أ^2$ - $ب^2$ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -50 & 39 \\ 99 & -70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -32 \\ -77 & 85 \end{bmatrix}$ ⟵ (2)

من (1) ، (2) ∴ (أ + ب) (أ − ب) ≠ $أ^2$ - $ب^2$

(ii) $(أ + ب)^2$ = $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 71 \\ 86 & -50 \end{bmatrix}$ ⟵ (1)

$أ^2$ + 2 أب + $ب^2$ = $\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -50 & 39 \\ 99 & -70 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -22 & 24 \\ -34 & 44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -50 & 39 \\ 99 & -70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51 & 58 \\ 104 & -33 \end{bmatrix}$ ⟵ (2)

من (1) ، (2) ∴ $(أ + ب)^2$ ≠ $أ^2$ + 2 أب + $ب^2$

iii $(أب − ب أ)^2$ = $\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right)^2$

$= \left(\begin{bmatrix} 16 & 13 \\ -18 & -17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -11 & 12 \\ -17 & 22 \end{bmatrix} \right)^2 = \left(\begin{bmatrix} -27 & -1 \\ 1 & 39 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1052 \\ -1052 & 0 \end{bmatrix}$

$|(أب − ب أ)^2|$ = $\left| \begin{bmatrix} 0 & -1052 \\ -1052 & 0 \end{bmatrix} \right| = 1106704$

5- إذا كانت أ = $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix}\text{ص}&\text{س}\\\text{ع}&0\end{bmatrix}$ و كانت ب^2 = أ فعين قيم ، س، ص، ع .

أوجد: 3أ - 2 ب.

الحل :

ب^2 = أ أي ان $\begin{bmatrix}\text{ص}&\text{س}\\\text{ع}&0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\text{ص}&\text{س}\\\text{ع}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{ص}&\text{س}\\\text{ع}&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\text{س ص + ص ع}&\text{س}^2\\\text{ع}^2&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ س^2 = 1 ⟵ س = ± 1

ع^2 = 1 ⟵ ع = ± 1

س ص + ص ع = 1

عندما س = 1 ، ع = 1 فإن 2 ص = 1 ⟵ ص = $\frac{1}{2}$

عندما س = -1 ، ع = -1 فإن -2 ص = 1 ⟵ ص = $\frac{-1}{2}$

عندما س = 1 ، ع = -1 فإن ص - ص = 1 ⟵ لايوجد حل

عندما س = -1 ، ع = 1 فإن - ص + ص = 1 ⟵ لايوجد حل

س = ± 1 ، ع = ± 1 ، ص = ± $\frac{1}{2}$

3 أ - 2 ب = $3\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}\text{ص}&\text{س}\\\text{ع}&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-2\text{ص}&3-2\text{س}\\3-2\text{ع}&0\end{bmatrix}$

6- إذا كانت $\begin{bmatrix}-\text{ب}&\text{أ}\\\text{أ}&\text{ب}\end{bmatrix}$ = أ س + ب ص حيث أ، ب ∈ ع فأوجد المصفوفتين س ، ص .

الحل :

نفرض مصفوفتين س = $\begin{bmatrix}\text{س}_2&\text{س}_1\\\text{س}_4&\text{س}_3\end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix}\text{ص}_2&\text{ص}_1\\\text{ص}_4&\text{ص}_3\end{bmatrix}$

أ $\begin{bmatrix}\text{س}_2&\text{س}_1\\\text{س}_4&\text{س}_3\end{bmatrix}$ + ب $\begin{bmatrix}\text{ص}_2&\text{ص}_1\\\text{ص}_4&\text{ص}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\text{ب}&\text{أ}\\\text{أ}&\text{ب}\end{bmatrix}$

أ س$_1$ + ب ص$_1$ = أ ⟵ س$_1$ = 1 ، ص$_1$ = 0

أ س$_2$ + ب ص$_2$ = - ب ⟵ ص$_2$ = -1 ، س$_2$ = 0

أ س$_3$ + ب ص$_3$ = ب ⟵ ص$_3$ = 1 ، س$_3$ = 0

أ س$_4$ + ب ص$_4$ = أ ⟵ س$_4$ = 1 ، ص$_4$ = 0

∴ س = $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$

7- أوجد ما تساويه كل المصفوفات الأتية $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ 0 & \text{ب} \end{bmatrix}^{\text{ن}}$

الحل :

لاحظ ان $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب أ} & \text{أ}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب أ} & \text{أ}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب أ}^2 & \text{أ}^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}} = \begin{bmatrix} \text{ب أ}^{\text{ن}-1} & \text{أ}^{\text{ن}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

بالمثل $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^3 \\ \text{ب}^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^{\text{ن}} \\ \text{ب}^{\text{ن}} & 0 \end{bmatrix}$

وكذلك ، $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ 0 & \text{ب} \end{bmatrix}^{\text{ن}} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^{\text{ن}} \\ 0 & \text{ب أ}^{\text{ن}-1} \end{bmatrix}$

8-إذا كان $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix}$

الحل :

$$\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3- & 1 \end{bmatrix}$$

محورة المصفوفة :- Transpse of a Matrix

إذا كانت ف مصفوفة فإن $ف^{/}$ هي محورتها

حيث $ف^{/}$ هي تبديل الأعمدة بالصفوف و الصفوف بالأعمدة

فمثلاً

$$أ = \begin{bmatrix} 5 & 1 & أ \\ 0 & 2 & ب \\ 5 & 3 & جـ \end{bmatrix} \quad \text{فإن محورتها} \quad أ^{/} = \begin{bmatrix} جـ & ب & أ \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{فإن محورتها} \quad ب^{/} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان

(i) $\left(أ^{/}\right)^{/} = أ$

(ii) $\left(أ + ب\right)^{/} = أ^{/} + ب^{/}$

(iii) $\left(أ\,ب\right)^{/} = ب^{/}\,أ^{/}$

مثال :

إذا كان $ل = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $م = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ حل المعادلة $س^{/} + 2\,ل^{/} = م$

الحل :

$$س^{/} + 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow س^{/} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$س^{/} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow س^{/} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -8 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

12– المصفوفة المتماثلة (Symmetrical Matrix):

هي مصفوفة مربعة عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي بنفس الإشارة أي أن المصفوفة = محورتها ف = ف/

مثل :

$$\text{ف} = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسى

مثال (1) :

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ص} & 2\text{س} & 5 \\ 16 & 9 & 8 \\ 3 & 4\text{ع} & 2\text{ع}+1 \end{bmatrix}$ أوجد قيم س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفة أ متماثلة .

الحل :

2 س = 8 ⟸ س = 4 ، 4 ع = 16 ⟸ ع = 4 ، 2 ع + 1 = ص ⟸ ص = 9

مثال (2) :

إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} \text{س}^2 - 1 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ متماثلة .

أوجد قيمة س .

الحل :

$\text{س}^2 - 1 = 3$ ⟸ $\text{س}^2 = 4$

س = ± 2

مثال (3) :

إذا كانت المصفوفة جـ = $\begin{bmatrix} \text{س}^2 - 1 & 4 \\ 8 & \text{س} + 5 \end{bmatrix}$ متماثلة . أوجد قيمة س .

الحل : $\text{س}^2 - 1 = \text{س} + 5$

$\text{س}^2 - \text{س} - 6 = 0$

(س – 3) (س + 2) = 0

س = { 3 , -2 }

تمرين :

(1) إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ص} & 3\text{س} & 1 \\ 20 & 3 & 15 \\ 5 & 4\text{ع} & 2\text{ع}-5 \end{bmatrix}$ أوجد قيم س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفة أ متماثلة .

(2) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 3 & س^2 - 6 \\ س & 7 \end{bmatrix}$ متماثلة . أوجد قيمة س .

13– المصفوفة ملتوية التماثل " عكسية التماثل " (Skew Symmetric Matrix):

هي مصفوفة مربعة قطرها الرئيسي أصفار وباقي عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي بعكس الإشارة أي أن المصفوفة = ـ محورتها ف = ـ ف/

مثل :

ف = $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

مثال (3) :

أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، د التي تجعل المصفوفة التالية ملتوية التماثل .

$$\begin{bmatrix} أ - ب & 3 & جـ + د \\ أ & 0 & د - ب \\ 8 & -6 & ب + د \end{bmatrix}$$

الحل :

أ = - 3 ، أ - ب = 0 ⟵ ب = - 3

د – ب = 6 ⟵ د = 6 - 3 ⟵ د = 3

جـ + د = - 8 ⟵ جـ = – 8 – 3 = – 11 ⟵ جـ = – 11

أ = - 3 ، ب = - 3 ، جـ = – 11 ، د = 3

تذكر أن

في المصفوفة ملتوية التماثل تكون العناصر متماثلة حول القطر الرئيسي الذي يتكون من أصفار ولكن بتغير إشارة العناصر.

ضع في ذاكرتك دائما

إذا كانت أ أية مصفوفة مربعة فإن :

-1 (أ + أ/) مصفوفة متماثلة " مصفوفة + محورتها = مصفوفة متماثلة " كذلك (أ × أ/) مصفوفة متماثلة

-2 (أ - أ/) مصفوفة ملتوية التماثل " مصفوفة - محورتها = مصفوفة ملتوية التماثل "

-3 $\frac{1}{2}\left[(\text{أ} + \text{أ}') + (\text{أ} - \text{أ}')\right] = \text{أ}$

تمرين 1 -ج:

1- أوجد قيم أ ، ب ، جـ التي تجعل المصفوفة ف متماثلة .

حيث: ف = $\begin{bmatrix} 2\text{جـ} & 8 & 8 \\ \text{ب} - 3 & 4 & \text{أ} \\ 2 & -2 & \text{جـ} + 1 \end{bmatrix}$

إذا كانت ف = $\begin{bmatrix} 3 & -\text{ب}^2 & 0 \\ -1 & 0 & \text{ب} + 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ملتوية التماثل فإن ب = ... ، ....

الحل :

المصفوفة متماثلة أي أن	المصفوفة ملتوية التماثل أي أن
$\text{أ} = 8$	$\text{ب} + 2 = \text{ب}^2$
$\text{ب} - 3 = -2 \longrightarrow \text{ب} = 1$	$\text{ب}^2 - \text{ب} - 2 = 0$
$\text{جـ} + 1 = 2\text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = 1$	$(\text{ب} + 1)(\text{ب} - 2) = 0 \quad \therefore \text{ب} = -1 \text{ ، } \text{ب} = 2$

2- إذا كانت محورة المصفوفة $\begin{bmatrix} 4\text{م} - 1 & \text{ل} + 3 \\ 6\text{هـ} & 2 - \text{ن} \end{bmatrix}$

تساوي المعكوس الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 4\text{م} & 2 \\ 3\text{ن} & \text{ل} + 2 \end{bmatrix}$

أوجد قيمة كل من: ل ، م ، هـ ، ن

الحل :

محورة المصفوفة $\begin{bmatrix} 4\text{م} - 1 & \text{ل} + 3 \\ 6\text{هـ} & 2 - \text{ن} \end{bmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 - \text{ن} & \text{ل} + 3 \\ 6\text{هـ} & 4\text{م} - 1 \end{bmatrix}$

ومعكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} 4\text{م} & 2 \\ 3\text{ن} & \text{ل} + 2 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{bmatrix} -4\text{م} & -2 \\ -3\text{ن} & -(\text{ل} + 2) \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 2 - \text{ن} & \text{ل} + 3 \\ 6\text{هـ} & 4\text{م} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\text{م} & -2 \\ -3\text{ن} & -(\text{ل} + 2) \end{bmatrix}$

$\text{ل} + 3 = -2$	$4\text{م} - 1 = -\text{ل} - 2$	$2 - \text{ن} = -4\text{م}$	$6\text{هـ} = -3\text{ن}$

ل = - 5   4م = 5 – 2 + 1   2 – ن = - 4   هـ = $\frac{-18}{6}$ = -3

م = 1   **ن = 6**   **هـ = - 3**

ل = - 5 ، م = 1 ، ن = 6 ، هـ = - 3

3- إذا كان حاصل ضرب المصفوفتين متماثلة، فما قيمة ج ؟

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & ج & 4 \\ -2 & -4 & 2ج \end{bmatrix} \quad ، \quad \begin{bmatrix} 6 & ج+1 & 1 \\ -4 & ج & 2 \\ -2 & 1 & ج \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & ج & 4 \\ -2 & -4 & 2ج \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & ج+1 & 1 \\ -4 & ج & 2 \\ -2 & 1 & ج \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3ج+4 & 5+3ج \\ 22-4ج & ج^2+4ج+5 & 4+3ج \\ 12ج+20 & 2ج^2-2ج-2 & -8 \end{bmatrix}$$

من التماثل نجد ان $2ج^2 - 2ج - 2 = 22 - 4ج$

$2ج^2 + 2ج - 24 = 0$ بالقسمة على 2 $\quad ج^2 + ج - 12 = 0$

$(ج - 3)(ج + 4) = 0$ ⟵ **ج = 3 ، ج = - 4**

4- إذا كانت

$$أ = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad ج = \begin{bmatrix} -4 & 5 & س \\ -2 & ص & 8 \\ ع & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

وكان أ + ب = ج فأوجد قيم س، ص، ع . ثم اكتب المصفوفة ج على صورة مجموع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى ملتوية التماثل.

الحل :

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & س \\ -2 & ص & 8 \\ ع & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 8 \\ 13 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & س \\ -2 & ص & 8 \\ ع & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

س = 3 ، ص = 1 ، ع = 13

$(\overset{/}{جـ} + جـ)\,\frac{1}{2} = {}_{1}جـ$

$$\left(\begin{bmatrix}-5 & 13 & 6\\ -5 & 2 & 13\\ 26 & -5 & -5\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2} = \left(\begin{bmatrix}-1 & 8 & 3\\ -3 & 1 & 5\\ 13 & -2 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4 & 5 & 3\\ -2 & 1 & 8\\ 13 & -3 & -1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2} = {}_{1}جـ$$

مصفوفة متماثلة

$$\left(\begin{bmatrix}-3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2} = \left(\begin{bmatrix}-1 & 8 & 3\\ -3 & 1 & 5\\ 13 & -2 & -4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4 & 5 & 3\\ -2 & 1 & 8\\ 13 & -3 & -1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2} = {}_{2}جـ$$

مصفوفة ملتوية التماثل

$$\left(\begin{bmatrix}-3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-5 & 13 & 6\\ -5 & 2 & 13\\ 26 & -5 & -5\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2} = جـ$$

5- إذا كانت ل= $\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ، م= $\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة: 12 (م ل)$^{/}$ = | م ل | س$^{/}$ ، حيث س$^{/}$ محورة المصفوفة س .

الحل:

12 (م ل)$^{/}$ = |م ل| س$^{/}$

$$س^{/}\left|\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\right| = \left(\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\right)^{/} 12$$

$$س^{/}\,24 = \left(\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & -4\end{pmatrix}\right)^{/} 12$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{2} = س^{/}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix} = س^{/}$$

6- إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النوع وكانت أ مصفوفة متماثلة ، وب مصفوفة ملتوية التماثل، فاثبت ان المصفوفة (أب + بأ) ملتوية التماثل وان المصفوفة أ^2 متماثلة.

الحل:

∵ أ مصفوفة متماثلة ∴ أ/ = أ

، ∵ ب مصفوفة ملتوية الثماثل ∴ ب/ = - ب

(أ ب + ب أ) ملتوية التماثل أي ان (أ ب + ب أ)/ = - (ب أ + ب أ)

(أ ب + ب أ)/ = (أ ب)/ + (ب أ)/

= ب/ أ/ + أ/ ب/

= - ب أ + أ (- ب)

حيث أ مصفوفة متماثلة ، ب مصفوفة ملتوية التماثل

= - (ب أ + أ ب)

= - (أ ب + ب أ)

(أ ب + ب أ) = - (أ ب + ب أ)/ أي ان (أ ب + ب أ) ملتوية التماثل

∵ أ مصفوفة متماثلة ∴ أ/ = أ وبتربيع الطرفين

∴ (أ^2)/ = أ^2

∴ المصفوفة أ^2 ملتوية التماثل

تمارين في المصفوفات :

1) اوجد المعكوس الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} \text{هـ} & -\text{س} & \text{ن} \\ -\text{ص} & \text{م} & \text{ق} \end{bmatrix}$

2) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} \frac{1-}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1- & \frac{3}{2} & 2- \end{bmatrix}$ فأوجد أ^4

3) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2- & 1 \\ 0 & 5- & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد أ + أ/ وماذا تلاحظ

4) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2- & 1 \\ 0 & 5- & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد أ - أ/ وماذا تلاحظ

5) حل المعادلة 3 س + $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ = - 2 $\left(\text{س} + \begin{bmatrix} 6- & 3- \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \right)$

6) أوجد قيم أ ، ب ، جـ التي تجعل المصفوفة ف متماثلة حيث :

ف = $\begin{bmatrix} 2\text{جـ} & 3 & 2 \\ 4-\text{ب} & 5- & \text{أ} \\ 1 & 3- & 3+\text{جـ} \end{bmatrix}$

7) أوجد قيمة س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفة ف ملتوية التماثل

ف = $\begin{bmatrix} \text{ع}+\text{ص} & 1- & \text{س}+\text{ص} \\ \text{ص}-5 & 0 & \text{س} \\ \text{ص}+1 & 6- & 8 \end{bmatrix}$

8) أوجد حاصل ضرب المصفوفتين أ ، ب حيث أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \\ 5- & 4- & 2- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1- & 2- & 3 \\ 1- & 1 & 4- \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9) إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س} & 2- & 1 \\ 5 & \text{ص} & 4- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ع} & 1 \\ 0 & 1- \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & 1- \\ 4\text{ن} & 3\text{ن} \end{bmatrix}$ أوجد قيم س ، ص ، ع ، ن .

(10) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$

I . أثبت أن $(أ\ ب)^{/} = ب^{/}\ .\ أ^{/}$

II. أوجد $3أ - 2ب$

(11) أوجد حاصل ضرب المصفوفات الأتية :

(أ) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(۶) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

(12) إذا كان $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة : $\begin{bmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{bmatrix}$

(13) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ أوجد أ + ب ، أ - ب ثم أثبت أن :

I. $(أ + ب)(أ - ب) \neq أ^{2} - ب^{2}$

II. $(أ + ب)^{2} \neq أ^{2} + 2أ\ ب + ب^{2}$

(14) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد $أ^{2}$

(15) (أ) أوجد قيم أ ، ب ، جـ التي تجعل المصفوفة ف متماثلة حيث :

$ف = \begin{bmatrix} 2جـ & 8 & 8 \\ 3 - ب & 4 & أ \\ 2 & -2 & جـ + 1 \end{bmatrix}$

(ب) إذا كانت $ف = \begin{bmatrix} 3 & -ب^{2} & 0 \\ -1 & 0 & ب + 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ملتوية التماثل فإن ب = ... ، .....

(16) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد $أ^{ن}$

ثم اوجد $2\text{أ}^2 + \text{أ} + I_2$

المحددات Determinants

ظهرت المحددات في البداية مرتبطة بحل المعادلات الخطية الآنية .

بحيث تكون فيها عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات حيث المحدد لابد ان يكون عدد الصفوف فيه مساوياً لعدد الأعمده

وتستخدم كذلك في إيجاد قيمة المصفوفة حيث لكل مصفوفة مربعة أ يرافقها محدد ويرمز له بالرمز | أ |

فمثلاً المصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix}$ يرافقها المحدد $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} \end{vmatrix}$

والمصفوفة $\text{ق} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ل} & \text{ك} \\ \text{ص} & \text{م} & \text{ى} \\ \text{ع} & \text{ن} & \text{ف} \end{bmatrix}$ يرافقها المحدد $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ل} & \text{ك} \\ \text{ص} & \text{م} & \text{ى} \\ \text{ع} & \text{ن} & \text{ف} \end{vmatrix}$

قيمة المحدد :-

يرمز إلى قيمة المحدد بالرمز Δ (دلتا)

أولاً : محدد الرتبة الثانية :

$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أ د} - \text{ب جـ}$

القطر الفرعي   القطر الرئيسي

أي أن Δ = **حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي – حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي**

مثال(1):-

قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-1) = 7$

مثال(2):-

إذا كانت $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & \text{س} \end{vmatrix} = 10$ فأوجد قيمة س

الحل:-

2 س – (- 4) = 10

2 س + 4 = 10 ← 2 س = 10 – 4

س = 3

مثال(3) :-

إذا كانت $\begin{vmatrix} 2\text{س} & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 6$ فإن س = ...

الحل:-

$-6\text{س} - 24 = 6 \leftarrow -6\text{س} = 30 \quad \therefore \text{س} = -5$

مثال (4) :-

حل المعادلات الأتية :

(i) $\begin{vmatrix} \text{س} & -1 \\ 2 & \text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

(ii) $\begin{vmatrix} \text{س} & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

الحل :

(i) $(\text{س}^2 + 2) + (\text{س} - 6) = 2 \Longleftarrow \text{س}^2 + \text{س} - 6 = 0$

$(\text{س} + 3)(\text{س} - 2) = 0$

مجموعة الحل $\{-3 ، 2\}$

(ii) $2\text{س} + 15 = -\text{س} + 3 \Longleftarrow 3\text{س} = -12$

س = - 4 مجموعة الحل هي: $\{-4\}$

مثال (5) :-

حل المعادلة : $\begin{vmatrix} 3\text{س} & -4 \\ 2 & 2-\text{س} \end{vmatrix} = -1$

الحل :

$6\text{س} - 3\text{س}^2 + 8 = -1$

$3\text{س}^2 - 6\text{س} - 9 = 0$ بالقسمة على 3

$\text{س}^2 - 2\text{س} - 3 = 0 \Longleftarrow (\text{س} - 3)(\text{س} + 1) = 0$

مجموعة الحل $\{3 ، -1\}$

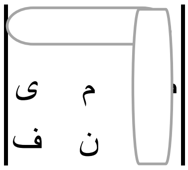
ثانياً : محدد الرتبة الثالثة :

(أ) طريقة المحددات الصغرى المرافقة:-

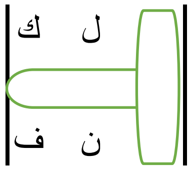
ويراعي فيها قاعدة الإشارات $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

حيث المحدد المرافق لأي عنصر نحصل عليه بعد حذف عناصر الصف والعمود المشتمل على هذا العنصر ففي محدد الرتبة الثالثة $\begin{vmatrix} ك & ل & س \\ ى & م & ص \\ ف & ن & ع \end{vmatrix}$ نجد أن

المحدد المرافق للعنصر س هو $\begin{vmatrix} ى & م \\ ف & ن \end{vmatrix}$



والمحدد المرافق للعنصر ص هو $\begin{vmatrix} ك & ل \\ ف & ن \end{vmatrix}$



وهكذا

وقيمة المحدد تساوي "مجموع حاصل ضرب عناصر أي صف أو أي عمود في قيمة المحددات الصغرى المرافقة لها في الإشارات المناظرة لها في قاعدة الإشارات" .

مثال(1):-

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1- & 2- \end{vmatrix}$

الحل :-

عن طريق الصف الأول

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1- & 2- \end{vmatrix} (1-) + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 2- \end{vmatrix} (3) - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1- \end{vmatrix} (2) = \Delta$$

$$(4) - (10) 3 - (13) 2 = \Delta$$

$$8- = 4 - 30 - 26 =$$

عن طريق العمود الأول

$$\begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} (2-) + \begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 4 & 1- \end{vmatrix} (0) - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1- \end{vmatrix} (2) = \Delta$$

$$(17) 2 - (11) 0 - (13) 2 = \Delta$$

8 - = 34 – 26 =

ملاحظة : يمكن إيجاد قيمة المحدد عن طريق فك أي صف أو عمود مع مراعاة قاعدة الإشارات .

مثال(2):-

أثبت أن المعادلة $\begin{vmatrix} 1 & ص & س \\ 1 & 2 & 1- \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 0 تمثل خطا مستقيما يمر بالنقطتين (1 ، 0) ، (-1 ، 2)

الحل :-

بفك المحدد عن طريق الصف الأول :

س $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ – ص $\begin{vmatrix} 1 & 1- \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} 2 & 1- \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 0

س (2 – 0) – ص (-1 – 1) + (0 – 2) = 0

2 س + 2 ص – 2 = 0 بالقسمة على 2

س + ص – 1 = 0

وهذه المعادلة هي معادلة خط مستقيم ومن الواضح أن النقطتين (1 ، 0) ، (-1 ، 2) تحققان المعادلة .

(ب) طريقة الأقطار:-

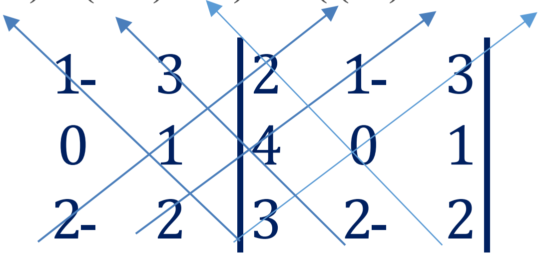
وذلك بتكرار كتابة العمود الأول والعمود الثاني .

مثال(3) :-

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 1- & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2- & 2 \end{vmatrix}$

الحل :-

15 = (27-) – 12 - = ((3 -) + (24 -) + 0) - ((4 -) + 8 - + 0)



Δ = [مجموع حواصل ضرب الأقطار الرئيسية] - [مجموع حواصل ضرب الأقطار الفرعية]

= (12-) – (27-) = 12- + 27 = 15

حالات خاصة :-

إذا كان المحدد في الصورة المثلثية

(1) $\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ه} & \text{د} & 0 \\ \text{و} & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = أ د و   **حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي**

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{أ} \\ 0 & \text{ج} & \text{ب} \\ \text{و} & \text{ه} & \text{د} \end{vmatrix}$ = أ ج و

وتسمي الصورة المثلثية السفلى والعليا .

مثال (4) :-

(i) $\begin{vmatrix} 5 & 1- & 3 \\ 8 & 7 & 0 \\ 1- & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = 21-

(ii) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2- & 1 \\ 3- & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 30

(3) $\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & \text{ه} & \text{د} \\ 0 & 0 & \text{و} \end{vmatrix}$ = - ج ه و **- حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي**

(4) $\begin{vmatrix} \text{أ} & 0 & 0 \\ \text{ب} & \text{ه} & 0 \\ \text{ج} & \text{د} & \text{و} \end{vmatrix}$ = - أ ه و

(5) $\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & \text{ه} & 0 \\ \text{و} & \text{د} & 0 \end{vmatrix}$ = أ ه و

(6) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} & \text{ب} \\ \text{و} & 0 & \text{ه} \end{vmatrix}$ = أ ج و

مثال (5) :-

(i) $\begin{vmatrix} 3- & 1- & 5 \\ 0 & 2- & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ = 24-

(ii) $\begin{vmatrix} 1- & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ = 6

بعض خواص المحددات :-

(1) محدد المصفوفة ﺃ يساوي محدد محورتها $|ﺃ| = |ﺃ^{/}|$

$$\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 8 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}$$ أي أن $\Delta = \Delta^{/}$

(2) تتغير إشارة المحدد إذا بادلنا صفين أو عمودين

$$\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 9 & 7 & 3\\ 2 & 5 & 4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}9 & 7 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 4\end{vmatrix}$$ بدلنا $ص_1$ ، $ص_2$

(3) إذا ضرب عدد في محدد فإنه يضرب في صف واحد أو عمود واحد والعكس إذا أخذ عامل مشترك يؤخذ من صف واحد أو عمود واحد .

$$2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}6 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}6 & 1\\ 10 & 4\end{vmatrix}$$

> إذا ضرب عناصر صف أو عمود في عدد ثابت ك فإن قيمة المحدد الجديدة ك × قيمة المحدد" ك × Δ "

(4) ينعدم المحدد (Δ = 0) في الحالات الآتية

i. إذا كان أحد الأعمدة أو الصفوف أصفار
ii. إذا تساوى صفان أو عمودان
iii. إذا وجد تناسب بين صفين أو عمودين
iv. وجد صف يساوي مجموع الصفين الآخرين أو عمود يساوي مجموع العمودين الآخرين .

مثال (6) :

- $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 9 & 7 & 5\\ -1 & 2 & ك+3\end{vmatrix} = 0$ فإن ك = ...

الحل :- $ص_1 = ص_3$ ⟸ $ك + 3 = 3$

∴ $ك = 3 - 3 = 0$

- $\begin{vmatrix}8 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 3\\ س & 2 & 1\end{vmatrix} = 0$ فإن س = ...

الحل :- يوجد تناسب بين $ص_1$ ، $ص_3$ ⟸ $\frac{2}{1} = \frac{8}{س}$

∴ $س = 4$

(5) إذا أحتوي أي صف أو عمود علي مجموع جبري عدده ن فإنه هناك ن من المحددات

$$\begin{vmatrix} \text{ك} & \text{ل} & \text{س} \\ \text{ى} & \text{م} & \text{ص} \\ \text{ف} & \text{ن} & \text{ع} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ى} & \text{م} & \text{ص} \\ \text{ف} & \text{ن} & \text{ع} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ك} + \text{ج} & \text{ل} + \text{ب} & \text{س} + \text{أ} \\ \text{ى} & \text{م} & \text{ص} \\ \text{ف} & \text{ن} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

مثال (7) :

إذا كان

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & \text{ص} & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & \text{س} & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

أوجد قيم س ، ص ، ع

الحل :

$\text{ع} = 7$ ، $\text{ص} = 2$ ، $\text{س} + 3 = 8$ $\Longleftarrow$ $\text{س} = 5$

(6) قيمة المحدد لا تتغير إذا أضفنا إلى عناصر أى صف أو عمود مضاعفات الصفوف أو الأعمدة الأخرى .

مثال (8):

$$\begin{vmatrix} \text{ك} & \text{ل} & \text{س} \\ \text{ى} + 5\text{ك} & \text{م} + 5\text{ل} & \text{ص} + 5\text{س} \\ \text{ف} - 3\text{ك} & \text{ن} - 3\text{ل} & \text{ع} - 3\text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ك} & \text{ل} & \text{س} \\ \text{ى} & \text{م} & \text{ص} \\ \text{ف} & \text{ن} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_2 = \text{ص}_2 + 5\,\text{ص}_1$ ، $\text{ص}_3 = \text{ص}_3 - 3\,\text{ص}_1$

مثال (9):

بدون فك أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{ص} + \text{ع} & \text{س} & 3 \\ \text{س} + \text{ع} & \text{ص} & 3 \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ع} & 3 \end{vmatrix} = 0$$

الحل

$\text{ع}_3 = \text{ع}_3 + \text{ع}_2$ ∴ المحدد =
$$\begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{س} & 3 \\ \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{ص} & 3 \\ \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{ع} & 3 \end{vmatrix} = 3\,(\text{س} + \text{ص} + \text{ع}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & 1 \\ 1 & \text{ص} & 1 \\ 1 & \text{ع} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

لأن $\text{ع}_1 = \text{ع}_3$

مثال (10) :

إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = 5$ فأوجد $\begin{vmatrix} 2\text{أ} & 3\text{ب} \\ 2\text{جـ} & 3\text{د} \end{vmatrix}$

الحل :

$$\begin{vmatrix} 3\text{ب} & 2\text{أ} \\ 3\text{د} & 2\text{جـ} \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$= -6 \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = -6 \times 5 = -30$$

تمرين 1-أ

1- أوجد قيمة المحددات الآتية:

$$\text{أ} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 2 & -3 & 6 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

أثبت أن: $\text{ب} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ \text{أ}^2 & 1 & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ}^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-\text{أ}^3)^2$ باستخدام خواص المحددات .

الحل :

(أ) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (3 \times -4) - (2 \times 5)$

$= -12 - 10 = -22$

(ب) عن طريق الصف الأول

$$\Delta = (4)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + (9)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 4(-18) - 5(-40) + 9(26)$$

$$= -72 + 200 + 234 = 362$$

الإثبات :

$$\text{ب} = \begin{vmatrix} 1+\text{أ}+\text{أ}^2 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1+\text{أ}+\text{أ}^2 & 1 & \text{أ} \\ 1+\text{أ}+\text{أ}^2 & \text{أ}^2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{ع}'_1 \Longleftarrow \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3$$

$$= (1+\text{أ}+\text{أ}^2)\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & 1 & \text{أ} \\ 1 & \text{أ}^2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{ص}'_2 \Longleftarrow \text{ص}_2 - \text{ص}_1 \\ \text{ص}'_3 \Longleftarrow \text{ص}_3 - \text{ص}_1 \end{matrix}$$

$$= (1+\text{أ}+\text{أ}^2)\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 0 & 1-\text{أ} & \text{أ}-\text{أ}^2 \\ 0 & \text{أ}^2-\text{أ} & 1-\text{أ}^2 \end{vmatrix} = (1+\text{أ}+\text{أ}^2)\begin{vmatrix} (1-\text{أ}) & \text{أ}(1-\text{أ}) \\ -\text{أ}(1-\text{أ}) & (1-\text{أ})(1+\text{أ}) \end{vmatrix}$$

$$= (1+\text{أ}+\text{أ}^2)(1-\text{أ})\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} \\ -\text{أ} & (1+\text{أ}) \end{vmatrix} = (1-\text{أ})\underbrace{(1-\text{أ})(1+\text{أ}+\text{أ}^2)}_{\text{فرق بين مكعبين}} = (1-\text{أ}^3)(1-\text{أ})(1+\text{أ}+\text{أ}^2)$$

$$= (\text{أ}^3 - 1)(\text{أ}^3 - 1) = (1 - \text{أ}^3)(1 - \text{أ}^3) = (1 - \text{أ}^3)^2$$

2- بدون فك المحددات أوجد قيمة المحددات الآتية:

$$\text{أ} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{جـ} = \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ص} & 2\text{س} \\ 6 & 3\text{ن} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{د} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -4 & -10 & -6 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$$\text{أ} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \Longleftarrow |\text{أ}| = (-2 \times -3 \times 4) = 24$$

$$\text{ب} = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Longleftarrow \Delta = 0$$ لوجود تناسب بين الصفين الأول والثالث

$$\text{جـ} = \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ص} & 2\text{س} \\ 6 & 3\text{ن} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Longleftarrow \Delta = 0$$ لوجود صف كله اصفار وهو الصف الثالث

$$\text{د} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -4 & -10 & -6 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} \Longleftarrow \Delta = 0$$ لأن $\text{ع}_1 + \text{ع}_3 = \text{ع}_2$

3- أوجد قيمة المجهول في كلا مما يأتي الآتية:

(i) $$\begin{vmatrix} \text{ع} & -2 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \\ 6 & \text{ص} & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & \text{س} & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

(ii) $$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ \text{ن} & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

(iii) إذا كان $$\begin{vmatrix} 12 & 9 & 7 \\ 4 & \text{ن} & 5 \\ 3 & 10 & \text{هـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & \text{ع} \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

الحل:-

(i) $$\begin{vmatrix} \text{ع} & -2 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \\ 6 & \text{ص} & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & \text{س} & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

س = - 8 ، ص = - 3 ، ع = 1

(ii) $$0 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ \text{ن} & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_1 + \text{ص}_2 = \text{ص}_3$ ، ن + (- 2) = 5 ⟸ **ن = 7**

(iii) إذا كان $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 12 \\ 5 & \text{ن} & 4 \\ \text{هـ} & 10 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ \text{ع} & 8 & 10 \\ 12 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$\because \Delta = \Delta^{/}$

$\therefore$ **ع = 9 ، ن = 8 ، هـ = 2**

4- إذا كان: $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{ء} \end{vmatrix} = 27$ **أثبت أن:** $\begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ب} & \text{جـ} + \text{ء} & 1 \\ \text{أ} - \text{ب} & \text{جـ} - \text{ء} & 1 \\ 2\text{أ} & 2\text{جـ} & 1 \end{vmatrix} = 54$ **بدون فك المحدد.**

الحل:-

نجري استبدال مرتين في الأعمدة لنحصل على

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} + \text{ب} & \text{جـ} + \text{ء} \\ 1 & \text{أ} - \text{ب} & \text{جـ} - \text{ء} \\ 1 & 2\text{أ} & 2\text{جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} + \text{ب} & \text{جـ} + \text{ء} \\ 0 & -2\text{ب} & -2\text{ء} \\ 0 & \text{أ} - \text{ب} & \text{جـ} - \text{ء} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_2^{/} \Longleftarrow \text{ص}_2 - \text{ص}_1$

$\text{ص}_3^{/} \Longleftarrow \text{ص}_3 - \text{ص}_1$

$$= \begin{vmatrix} -2\text{ب} & -2\text{ء} \\ \text{أ} - \text{ب} & \text{جـ} - \text{ء} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ء} \\ \text{أ} - \text{ب} & \text{جـ} - \text{ء} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ء} \\ \text{أ} - \text{ب} + \text{ب} & \text{جـ} - \text{ء} + \text{ء} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_2^{/} \Longleftarrow \text{ص}_2 + \text{ص}_1$

$$= -2 \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ء} \\ \text{أ} & \text{جـ} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{ء} \end{vmatrix} = 2 \times 27 = 54$$

5 - باستخدام خواص المحددات أثبت: $\begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ص} & \text{أ} + \text{ص} & \text{س} \\ \text{ب} - \text{ص} & \text{ب} + \text{ص} & \text{س} \\ \text{جـ} - \text{ص} & \text{جـ} + \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = 0$

الحل:-

العمود الثاني يساوي العمود الثاني – العمود الأول

$\begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ص} & 2\text{ص} & \text{س} \\ \text{ب} - \text{ص} & 2\text{ص} & \text{س} \\ \text{جـ} - \text{ص} & 2\text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$ بأخذ س عامل مشترك من العمود الثالث و 2 ص من العمود الثاني

$2\,\text{س}\,\text{ص} \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ص} & 1 & 1 \\ \text{ب} - \text{ص} & 1 & 1 \\ \text{جـ} - \text{ص} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ من تساوي عمودين " العمود الثاني والعمود الثالث "

6 - أوجد قيم س التي تجعل:

(i) $\begin{vmatrix} \text{س} & -1 & 0 \\ 3 & 4 & \text{س} \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$ (ii) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ \text{س} & 4 & 3 \end{vmatrix} = 26$ (iii) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3\text{س}+1 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (iv) $\begin{vmatrix} \text{س}^2 & \text{س} & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

الحل:-

(i) $\begin{vmatrix} \text{س} & -1 & 0 \\ 3 & 4 & \text{س} \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$

- س (- 2 – س) + 2 (-3 – 4 س) = 10

2 س + س^2 – 6 – 8 س = 10

س^2 - 6 س – 16 = 0

(س + 2)(س - 8) = 0 ⟵ **س = - 2 ، س = 8**

(ii) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ \text{س} & 4 & 3 \end{vmatrix} = 26$

2 (- 3 س + 4) – (- س – 20) + 3 (1 + 15) = 26

- 6 س + 8 + س + 20 + 3 + 45 – 26 = 0

5 س = 50 ⟵ **س = 10**

(iii) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3\text{س}+1 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

ع$_1$ = ع$_3$ عندما 3 س + 1 = 4

3 س + 1 = 4

3 س = 3 ⟵ **س = 1**

(iv) $\begin{vmatrix} \text{س}^2 & \text{س} & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ص$_1$ = ص$_2$ عندما **س = -3**

ص$_1$ = ص$_3$ عندما **س = 2**

تمارين في المحددات :-

1- بدون فك المحدد أثبت أن (أ) $\begin{vmatrix} 5\text{أ} - 3\text{جـ} & 2\text{ب} & 4 \\ 2\text{ب} + 5\text{أ} & -3\text{جـ} & 4 \\ 2\text{ب} - 3\text{جـ} & 5\text{أ} & 4 \end{vmatrix} = 0$ ، (ب) $\begin{vmatrix} \text{ص} + \text{ع} & \text{س} & 5 \\ \text{س} + \text{ع} & \text{ص} & 5 \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ع} & 5 \end{vmatrix} = 0$

2- إذا كان $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ \text{جـ} & 7 & 4 \\ 9 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & 4 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \\ 9 & 12 & 5 \end{vmatrix}$ فأوجد قيمة كل من جـ ، س

3- أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{س}^2 & \text{س} & \text{ص ع} \\ \text{ص}^2 & \text{ص} & \text{س ع} \\ \text{ع}^2 & \text{ع} & \text{س ص} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س}^3 & \text{س}^2 & 1 \\ \text{ص}^3 & \text{ص}^2 & 1 \\ \text{ع}^3 & \text{ع}^2 & 1 \end{vmatrix}$

4- بدون فك المحدد أوجد قيمة س $\begin{vmatrix} \text{س}^2 & \text{س} & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

5- حل المعادلة $\begin{vmatrix} -5 & \text{س} + 1 \\ \text{س} - 1 & 1 \end{vmatrix} = 13$

6- أوجد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} \text{س} & -1 & 0 \\ 3 & 4 & \text{س} \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$

7- حل المعادلة $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2\text{جاهـ} \\ -1 & 2\text{جا هـ} & 1 \\ 2\text{جاهـ} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ، $0 < \text{هـ} < 180$

8- إذا كان $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ \text{س} & 5 \end{vmatrix} = 7$ فإن قيمة س = ...

9- قيمة $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ هي ....

10- قيمة $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ = ...

11- إذا كان $\begin{vmatrix} 5\text{س} & \text{س} + 1 & \text{س}^2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 15 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$ فإن قيمة س تساوي ....

12- أوجد قيمة أ إذا كان : $\begin{vmatrix} 3\text{س} & -\text{س} \\ 2\text{س} & 5\text{س} \end{vmatrix} = \text{أ}\,\text{س}^2$